TEMA 5: INTEGRACIÓN MÚLTIPLE

FMIBII – Curso 2016/2017

Biomedical engineering degree

Cristina Sánchez López de Pablo
Universidad San Pablo CEU
Madrid

TEMA 5: INTEGRACIÓN MÚLTIPLE

TEMA 5: INTEGRACIÓN MÚLTIPLE

¿Cómo se resuelve una integral definida con funciones de varias variables?

$$\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f_x(x, y)\, dx = f(x, y)\Big]_{h_1(y)}^{h_2(y)} = f(h_2(y), y) - f(h_1(y), y) \qquad \text{Con respecto a } x.$$

$$\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f_y(x, y)\, dy = f(x, y)\Big]_{g_1(x)}^{g_2(x)} = f(x, g_2(x)) - f(x, g_1(x)) \qquad \text{Con respecto a } y.$$

Ejemplo: Integral con respecto a *y*

$$\int_1^x (2x^2y^{-2} + 2y)\, dy = \left[\frac{-2x^2}{y} + y^2\right]_1^x$$

$$= \left(\frac{-2x^2}{x} + x^2\right) - \left(\frac{-2x^2}{1} + 1\right)$$

$$= 3x^2 - 2x - 1$$

Se considera ***x*** **constante** y se **integra con respecto a *y***

Ejemplo: La integral de una integral → **INTEGRALES ITERADAS**

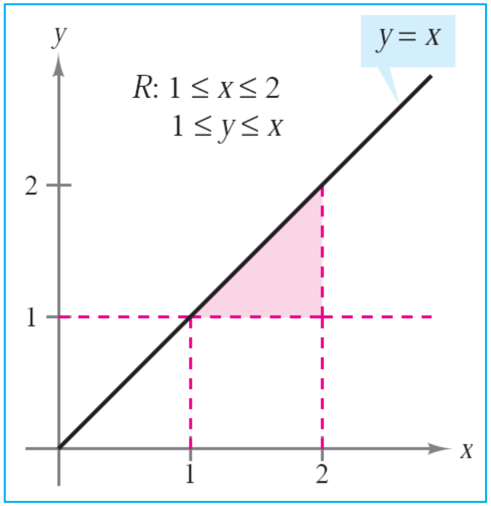
Utilizando el resultado del ejemplo anterior resolvemos la integral con respecto a x

$$\int_1^2 \left[\int_1^x (2x^2y^{-2} + 2y)\, dy \right] dx = \int_1^2 (3x^2 - 2x - 1)\, dx = \Big[x^3 - x^2 - x \Big]_1^2 = 2 - (-1) = 3$$

Esta integral es una **integral iterada**, cuya nomenclatura suele ser la siguiente:

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx \quad \text{y} \quad \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy$$

- En una integral iterada los **límites exteriores de integración** deben ser **constantes con respecto a ambas variables de integración**
- Después **la integración interior**, se obtiene una **integral definida "ordinaria"** y la segunda integración **produce un número real**
- Los límites de integración definen **dos intervalos para las variables**: se determina la **región de integración *R*** de la integral iterada



Utilizando las integrales iteradas y el teorema fundamental del cálculo puede verse desde una **nueva perspectiva** el problema de hallar el **área de una región plana *R* acotada por $a \leq x \leq b$ y $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$**

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy\,dx = \int_a^b y\Big]_{g_1(x)}^{g_2(x)} dx = \int_a^b [g_2(x) - g_1(x)]\,dx$$

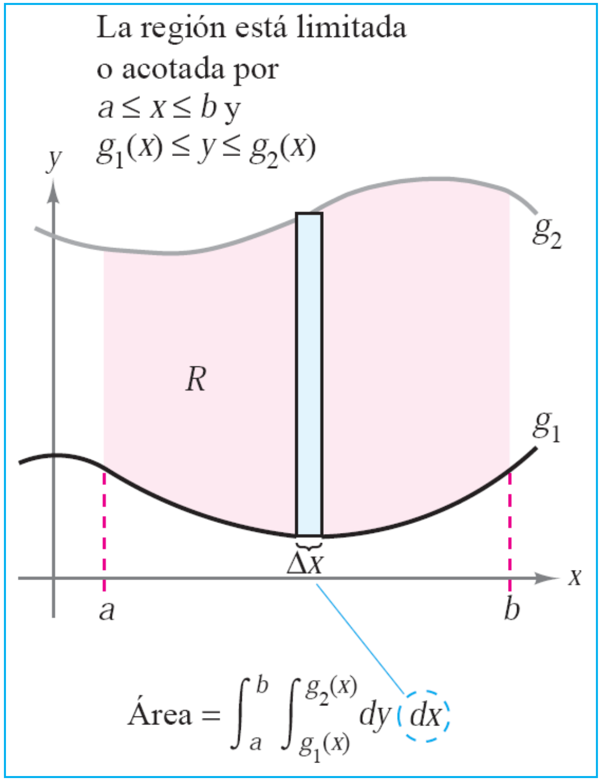
ÁREA DE UNA REGIÓN EN EL PLANO

1. Si R está definida por $a \leq x \leq b$ y $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$, donde g_1 y g_2 son continuas en $[a, b]$, R está dada por

$$A = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy\,dx \qquad \text{(verticalmente simple)}$$

2. Si R está definida por $c \leq y \leq d$ y $h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$, donde h_1 y h_2 son continuas en $[c, d]$, R está dada por

$$A = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} dx\,dy \qquad \text{(horizontalmente simple)}$$



Ejemplo: Hallar el área por medio de una integral iterada

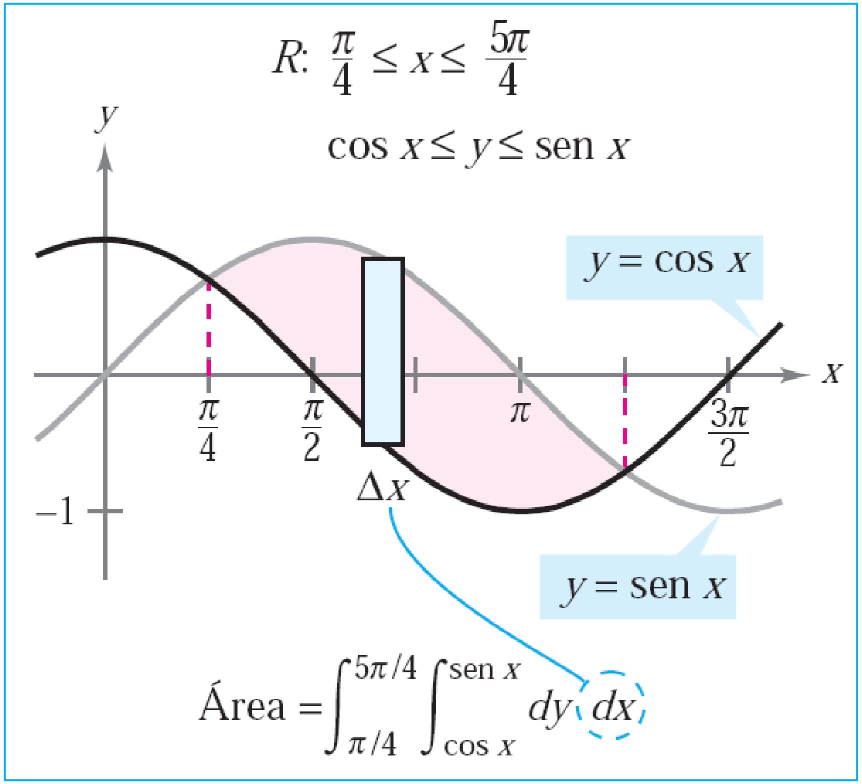
Hallar el área de la región limitada o acotada por las gráficas de $f(x)$ = sen x y $g(x)$ = cos x entre $x = \pi/4$ y $x = 5\pi/4$

***f* y *g* funciones de *x* → *R* verticalmente simple**

Orden de integración: ***dy dx***

Límites exteriores de integración: **$\pi/4 \leq x \leq 5\pi/4$**

$$\begin{aligned}
\text{Área de } R &= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \int_{\cos x}^{\operatorname{sen} x} dy\, dx \\
&= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} y \Big]_{\cos x}^{\operatorname{sen} x} dx \\
&= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\operatorname{sen} x - \cos x)\, dx \\
&= \Big[-\cos x - \operatorname{sen} x \Big]_{\pi/4}^{5\pi/4} = 2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

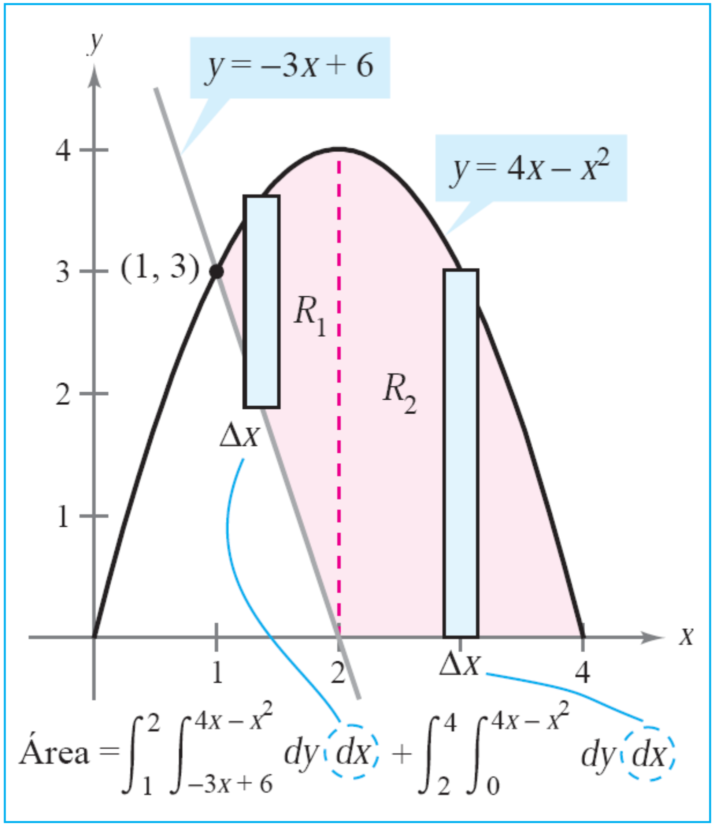


Ejemplo: Un área representada por dos integrales iteradas

Hallar el área de la región *R* que se encuentra bajo la parábola $y = 4x - x^2$ sobre el eje *x* y sobre la recta $y = -3x + 6$

- La **parábola** forma el límite o **cota superior**
- La **recta y el eje *x*** forman el límite o **cota inferior**
- *R* debe subdividirse en **dos subregiones R_1 y R_2**
- Se utilizan **rectángulos verticales**

$$\begin{aligned}
\text{Área} &= \int_1^2 \int_{-3x+6}^{4x-x^2} dy\,dx + \int_2^4 \int_0^{4x-x^2} dy\,dx \\
&= \int_1^2 (4x - x^2 + 3x - 6)\,dx + \int_2^4 (4x - x^2)\,dx \\
&= \left[\frac{7x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - 6x\right]_1^2 + \left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_2^4 \\
&= \left(14 - \frac{8}{3} - 12 - \frac{7}{2} + \frac{1}{3} + 6\right) + \left(32 - \frac{64}{3} - 8 + \frac{8}{3}\right) = \frac{15}{2}
\end{aligned}$$



Para entender el **uso de integrales dobles de funciones de dos variables** para **determinar el volumen de una región sólida** es necesario:

- **Aproximar el volumen total como suma de volúmenes más pequeños contenidos en la región**
- **Aplicar el proceso de límite**

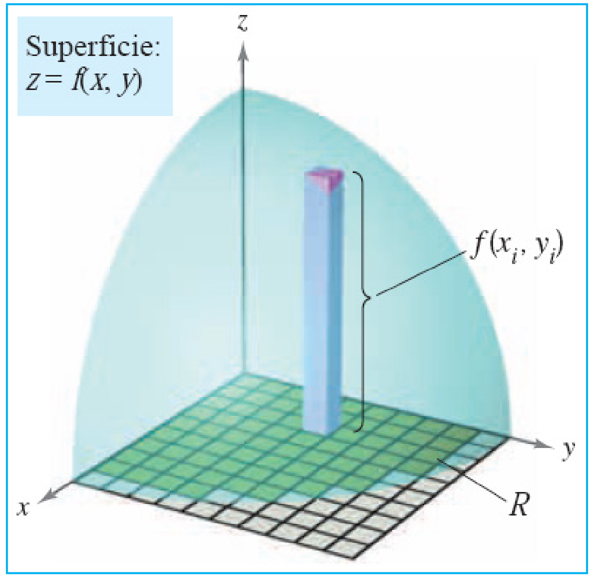
Se considera una función continua *f* tal que $f(x,y) \geq 0$ para todo (x, y) en una región *R* del plano *xy*

Objetivo: hallar el volumen de la región sólida comprendida entre la superficie dada por $z = f(x, y)$ y el plano *xy*

- Se sobrepone una cuadrícula interior sobre la región → **partición interior Δ**
- Se elige un **punto (x_i, y_i) en cada rectángulo** y se forma el **prisma rectangular cuya altura es $f(x_i, y_i)$**

El **volumen de la región sólida** se puede **aproximar** como:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\, \Delta A_i$$ Suma de Riemann



Usando **particiones más finas** se obtienen **mejores aproximaciones** → se podría obtener el **volumen exacto tomando un límite**

$$\text{Volumen} = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\, \Delta A_i$$

El **significado de este límite** es que el límite **es igual a *L*** si **para todo ε > 0 existe un *δ* > 0** tal que

$$\left| L - \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\, \Delta A_i \right| < \varepsilon$$

para toda partición Δ de la región plana *R* (que satisfaga || Δ || < δ) **para toda elección posible de x_i e y_i en la región *i-ésima***

NOTA: Es importante tener en cuenta que el caso general que define del uso del límite para definir una integral doble no requiere que la función *f*(*x*, *y*) sea positiva o continua en todo su dominio

DEFINICIÓN DE INTEGRAL DOBLE

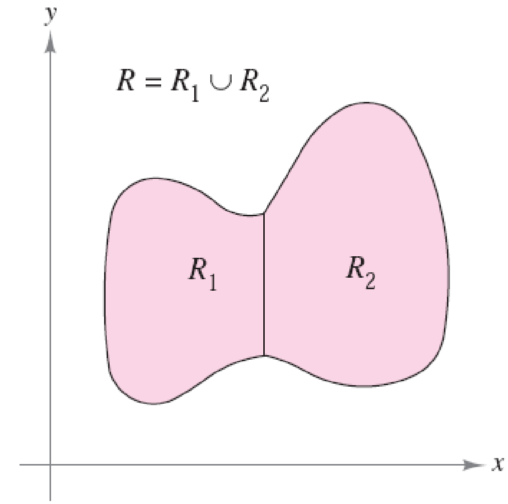
Si f está definida en una región cerrada y acotada R del plano xy, entonces la **integral doble de f sobre R** está dada por

$$\int_R\int f(x, y)\, dA = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\, \Delta A_i$$

siempre que el límite exista. Si existe el límite, entonces f es **integrable** sobre R.

Para que la integral doble de *f* de la región *R* exista es suficiente con que:

- *R* pueda expresarse como la unión de un número finito de subregiones que no se sobrepongan y que sean vertical u horizontalmente simples
- y *f* sea continua en la región *R*

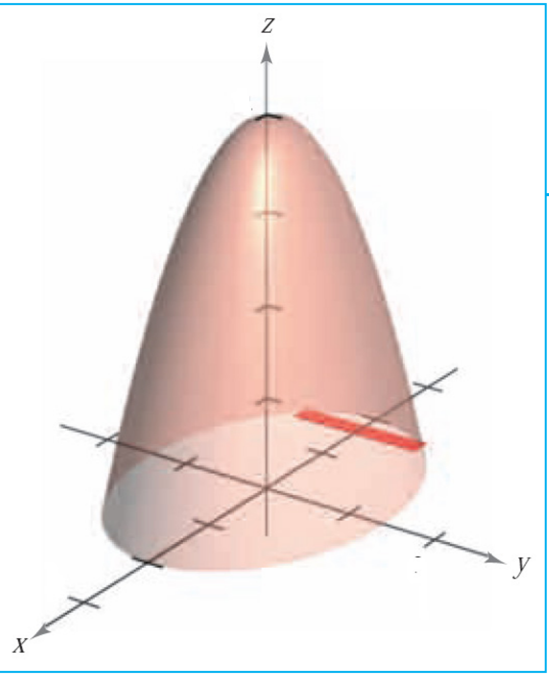


VOLUMEN DE UNA REGIÓN SÓLIDA

Si f es integrable sobre una región plana R y $f(x, y) \geq 0$ para todo (x, y) en R, entonces el volumen de la región sólida que se encuentra sobre R y bajo la gráfica de f se define como

$$V = \int_R \int f(x, y)\, dA$$

En este caso, si se **cumplen las condiciones establecidas**, es posible **utilizar una integral doble para calcular el volumen de una región sólida**



PROPIEDADES DE LAS INTEGRALES DOBLES

Sean f y g continuas en una región cerrada y acotada R del plano, y sea c una constante.

1. $\displaystyle\int_R\int cf(x, y)\, dA = c\int_R\int f(x, y)\, dA$

2. $\displaystyle\int_R\int [f(x, y) \pm g(x, y)]\, dA = \int_R\int f(x, y)\, dA \pm \int_R\int g(x, y)\, dA$

3. $\displaystyle\int_R\int f(x, y)\, dA \geq 0, \qquad \text{si } f(x, y) \geq 0$

4. $\displaystyle\int_R\int f(x, y)\, dA \geq \int_R\int g(x, y)\, dA, \qquad \text{si } f(x, y) \geq g(x, y)$

5. $\displaystyle\int_R\int f(x, y)\, dA = \int_{R_1}\int f(x, y)\, dA + \int_{R_2}\int f(x, y)\, dA$, donde R es la unión de dos subregiones R_1 y R_2 que no se sobreponen.

Para evaluar una integral doble, suele ser necesario reescribirla como una integral iterada

Ejemplo: Hallar el volumen de una región sólida acotada por el plano $z = f(x, y) = 2 - x - 2y$ y por los tres planos coordenados

Para un **valor fijo de *x***, el **área de la sección transversal** triangular es:

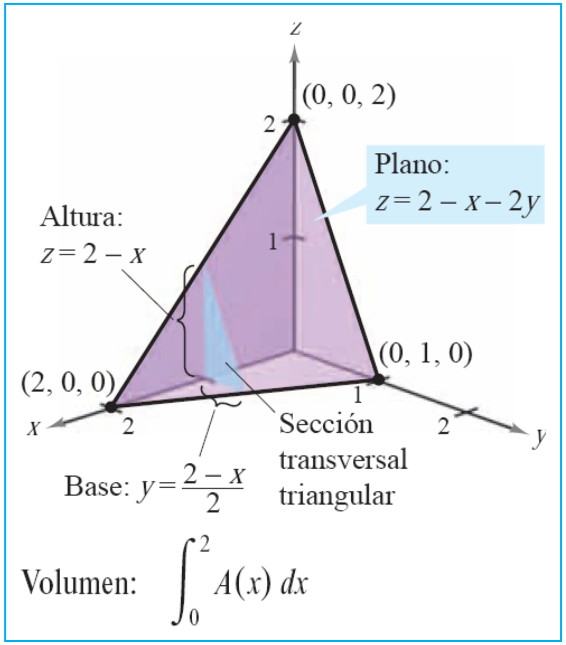
$$A(x) = \frac{1}{2}\,(\text{base})(\text{altura}) = \frac{1}{2}\left(\frac{2-x}{2}\right)(2-x) = \frac{(2-x)^2}{4}$$

De acuerdo con la **fórmula para el volumen de un sólido de secciones transversales conocidas** el volumen del sólido es:

$$\text{Volumen} = \int_a^b A(x)\,dx = \int_0^2 \frac{(2-x)^2}{4}\,dx = -\frac{(2-x)^3}{12}\Bigg]_0^2 = \frac{2}{3}$$

En particular, si ***A*(*x*) se obtiene por integración**, podemos **combinar los resultados** para obtener **la integral iterada:**

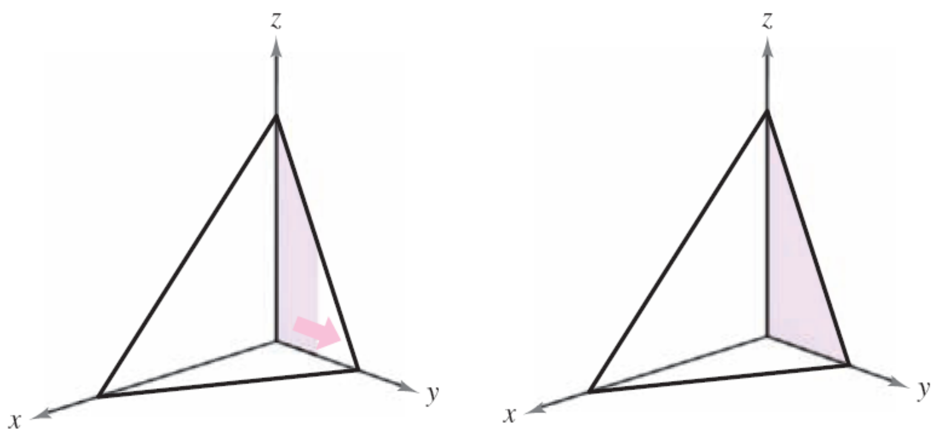
$$\text{Volumen} = \iint_R f(x, y)\,dA = \int_0^2 \int_0^{(2-x)/2} (2 - x - 2y)\,dy\,dx$$



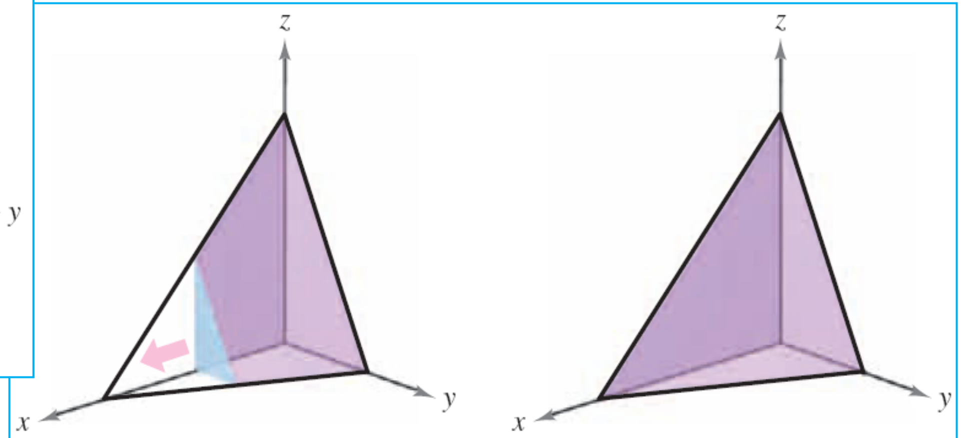
NOTA: Se puede **imaginar la integración como dos barridos → en el ejemplo anterior…**

- **Integración interior:** una recta vertical barre el área de la sección transversal
- **Integración exterior:** la sección transversal triangular barre el volumen

Integración exterior



Integrar con respecto a y para obtener el área de la sección transversal



Integrar con respecto a x para obtener el volumen del sólido

Integración interior

¿Bajo qué condiciones se pueden utilizar integrales iteradas para resolver este tipo de problemas?

TEOREMA DE FUBINI

Sea f continua en una región plana R.

1. Si R está definida por $a \leq x \leq b$ y $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$, donde g_1 y g_2 son continuas en $[a, b]$, entonces

$$\int\int_R f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx.$$

2. Si R está definida por $c \leq y \leq d$ y $h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$, donde h_1 y h_2 son continuas en $[c, d]$, entonces

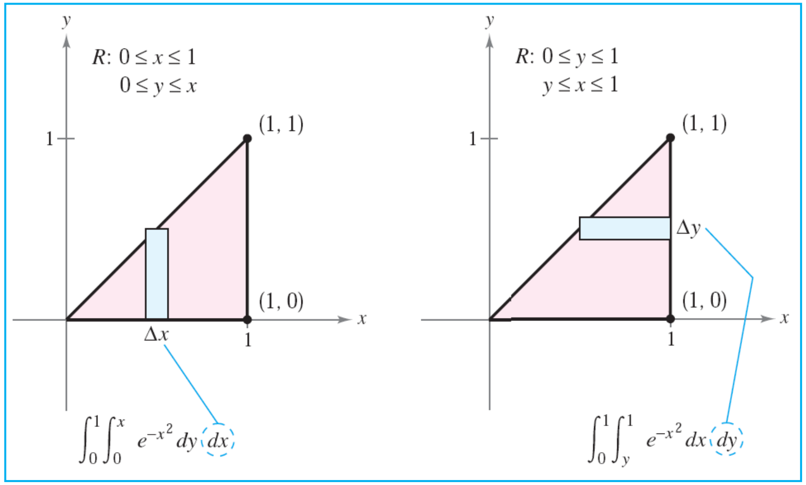
$$\int\int_R f(x, y)\, dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy.$$

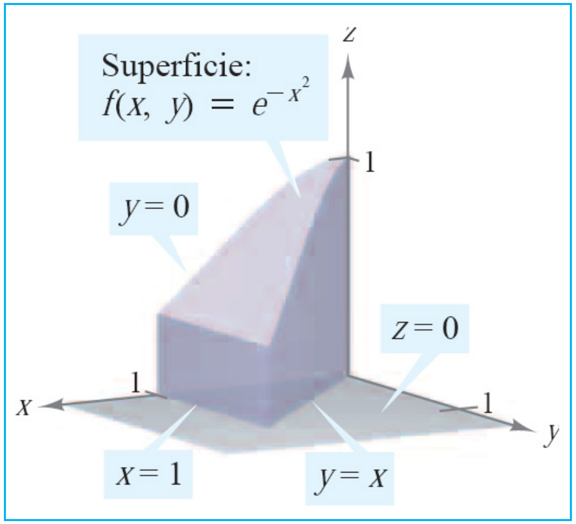
Ejemplo: Comparación de diferentes órdenes de integración

Hallar el volumen de la región sólida *R* acotada por $f(x, y) = e^{-x^2}$ y los planos $z = 0$, $y = 0$, $y = x$ y $x = 1$

La base de *R* en el plano *xy* está acotada por las rectas $y = 0$, $x = 1$ y $y = x$

Posibles órdenes de integración:





El **orden *dx dy* requiere** obtener la **integral de una función no elemental**, por lo que es **más adecuado usar el orden *dy dx*:**

$$\int_0^1\int_0^x e^{-x^2}\,dy\,dx = \int_0^1 e^{-x^2}y\Big]_0^x dx = \int_0^1 xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big]_0^1 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e}-1\right) \approx 0.316$$

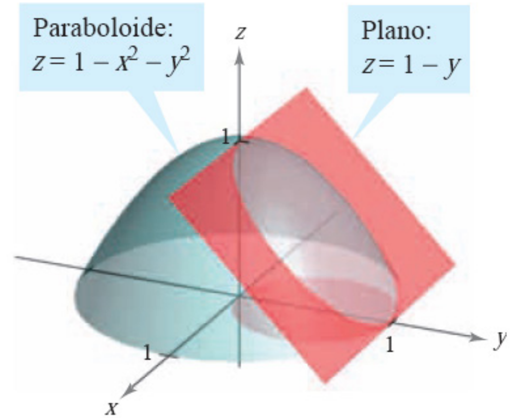
Ejemplo: Volumen de una región acotada por dos superficies

Hallar el volumen de la región sólida *R* acotada superiormente por el paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ e inferiormente por el plano $z = 1 - y$

Igualando los valores de *z* se determina que la **intersección de las dos superficies** se produce en el cilindro circular recto dado por:

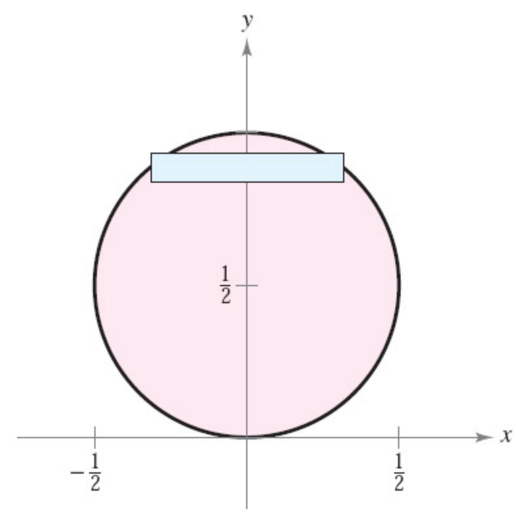
$1 - y = 1 - x^2 - y^2 \rightarrow x^2 = y - y^2$

$$\begin{aligned}
\text{Volumen} &= \int_0^1 \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} (1 - x^2 - y^2)\,dx\,dy - \int_0^1 \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} (1 - y)\,dx\,dy \\
&= \int_0^1 \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} (y - y^2 - x^2)\,dx\,dy = \int_0^1 \left[(y - y^2)x - \frac{x^3}{3} \right]_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} dy \\
&= \frac{4}{3}\int_0^1 (y - y^2)^{3/2}\,dy = \frac{1}{6}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^4\theta}{2}\,d\theta \qquad 2y - 1 = \operatorname{sen}\theta \\
&= \frac{1}{6}\int_0^{\pi/2} \cos^4 d\theta = \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{3\pi}{16}\right) = \frac{\pi}{32}
\end{aligned}$$



R: $0 \le y \le 1$

$-\sqrt{y - y^2} \le x \le \sqrt{y - y^2}$



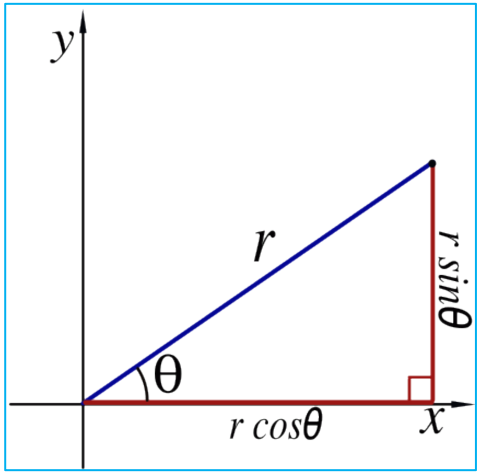
Algunas integrales dobles son mucho más fáciles de evaluar en forma polar que en forma rectangular

- Regiones circulares
- Cardioides
- Curvas “pétalos de rosa”
- Integrandos que contienen $x^2 + y^2$

¿Cómo se pasa de coordenadas cartesianas a coordenadas polares y viceversa?

$$x = r\cos\theta \quad \text{y} \quad y = r \operatorname{sen}\theta$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \text{y} \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

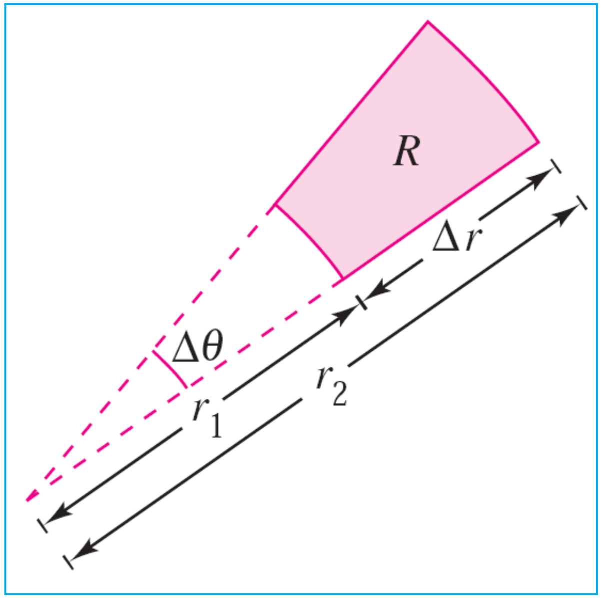


Para entender cómo se define una integral doble en coordenadas polares es necesario en primer lugar **saber cómo expresar el área de un sector polar**

- Se puede demostrar que el **área de un sector polar** R se puede expresar como $\Delta A = r\,\Delta r\,\Delta\vartheta$ siendo $r = (r_2 + r_1)/2$

- Se puede expresar el **área del sector polar** R como la **diferencia entre el área del sector circular** $R_2(r_2, \vartheta)$ **y del sector circular** $R_1(r_1, \vartheta)$

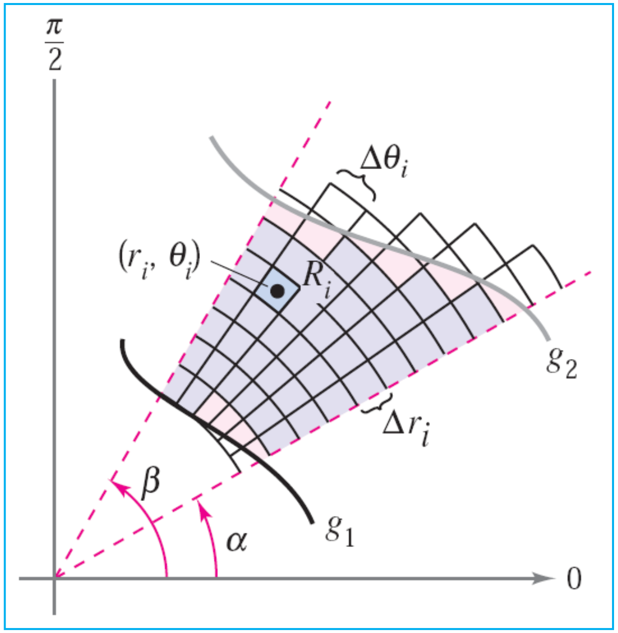
$$\text{Área de } R = \Delta A = \Delta A_2 - \Delta A_1 = \frac{r_2^2\,\Delta\vartheta}{2} - \frac{r_1^2\,\Delta\vartheta}{2}$$
$$= \frac{\Delta\vartheta}{2}(r_2^2 - r_1^2) = \frac{\Delta\vartheta}{2}(r_2 + r_1)(r_2 - r_1)$$
$$= \Delta\vartheta\, r\,(r_2 - r_1) = r\,\Delta\vartheta\,\Delta r$$



¿Cómo se define una integral doble de una función continua $z = f(x, y)$ en coordenadas polares?

Se considera una región R limitada por las gráficas de $r = g_1(\vartheta)$ y $r = g_2(\vartheta)$ y las rectas $\vartheta = \alpha$ y $\vartheta = \beta$

En vez de hacer una partición de R en rectángulos pequeños, se utiliza una **partición de sectores polares pequeños** → los sectores polares R_i que se encuentran completamente dentro de R forman una **partición polar interna Δ**



El área del sector R_i se puede expresar como:

$\boldsymbol{\Delta A_i = r_i\, \Delta r_i\, \Delta\vartheta_i}$, donde $\boldsymbol{\Delta r_i = r_2 - r_1}$ y $\boldsymbol{\Delta\vartheta_i = \vartheta_2 - \vartheta_1}$

Por tanto**, el volumen del sólido de altura $f(r_i \cos \vartheta_i, r_i \operatorname{sen} \vartheta_i)$** sobre R_i es aproximadamente:

$$\boxed{f(r_i \cos \theta_i,\, r_i \operatorname{sen} \theta_i) r_i \,\Delta r_i \,\Delta \theta_i}$$

¿Cómo se define una integral doble de una función continua *z* = *f*(*x*, *y*) en coordenadas polares? II

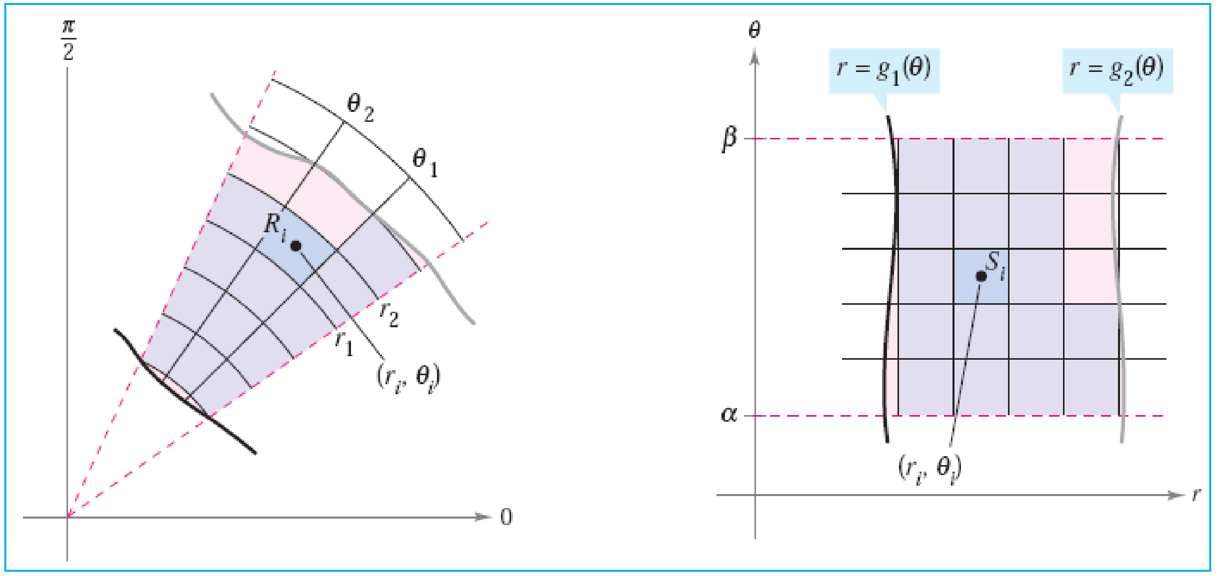
Por tanto:

$$\iint_R f(x, y)\, dA \approx \sum_{i=1}^{n} f(r_i \cos \theta_i, r_i \operatorname{sen} \theta_i) r_i\, \Delta r_i\, \Delta \theta_i$$

$$= \iint_S f(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta) r\, dA = \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta) r\, dr\, d\theta$$

El sector polar R_i es el conjunto de todos los puntos (r, θ) tal que $r_1 \leq r \leq r_2$ y $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$

Región S horizontalmente simple

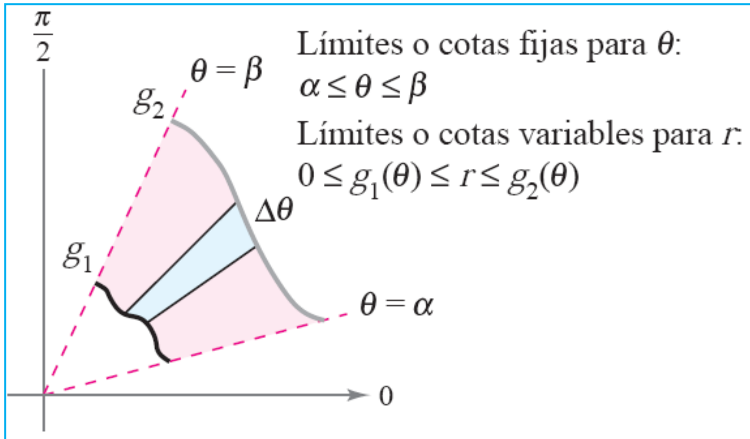


CAMBIO DE VARIABLES A LA FORMA POLAR

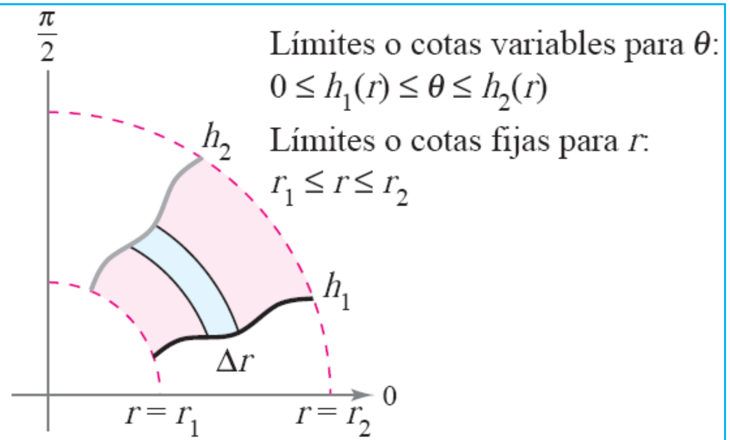
Sea R una región plana que consta de todos los puntos $(x, y) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$ que satisfacen las condiciones $0 \le g_1(\theta) \le r \le g_2(\theta)$, $\alpha \le \theta \le \beta$, donde $0 \le (\beta - \alpha) \le 2\pi$. Si g_1 y g_2 son continuas en $[\alpha, \beta]$ y f es continua en R, entonces

$$\int\!\!\int_R f(x, y)\, dA = \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) r\, dr\, d\theta.$$

NOTA: **La región *R* puede ser de dos tipos básicos**: regiones ***r*-simples** y regiones ***ϑ*-simples*:***



Región r-simple



Región θ-simple

NOTA: si $z = f(x, y)$ es no negativa en R, entonces la integral del teorema anterior puede interpretarse como el volumen de la región sólida entre la gráfica de f y la región R

Ejemplo: Calcular el volumen de una región sólida utilizando el cambio a coordenadas polares

Hallar el volumen de la región sólida limitada superiormente por el hemisferio definido por z, e inferiormente por la región circular R dada por $x^2 + y^2 \leq 4$

En coordenadas cartesianas:

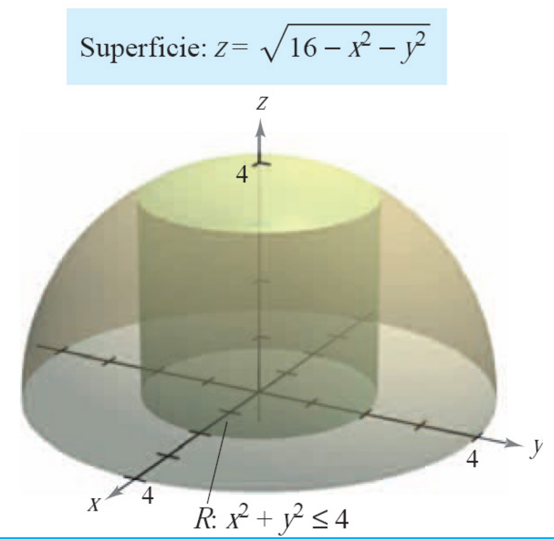
$$-\sqrt{4-y^2} \leq x \leq \sqrt{4-y^2}, \quad -2 \leq y \leq 2, \quad 0 \leq z \leq \sqrt{16-x^2-y^2}$$

En coordenadas polares:

$$0 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad z = \sqrt{16-r^2}$$

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^2 \sqrt{16-r^2}\, r\, dr\, d\theta = -\frac{1}{3}\int_0^{2\pi} (16-r^2)^{3/2}\Big]_0^2 d\theta$$

$$= -\frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \left(24\sqrt{3}-64\right) d\theta = -\frac{8}{3}\left(3\sqrt{3}-8\right)\theta\Big]_0^{2\pi} = \frac{16\pi}{3}\left(8-3\sqrt{3}\right)$$



Ejemplo: Hallar áreas de regiones polares

Utilizar una integral doble para hallar el área encerrada por la gráfica de $r = 3 \cos 3\vartheta$

Sea r un pétalo de la curva considerada → la región es r-simple, y los límites son los siguientes:

$$-\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6} \qquad \text{Límites o cotas fijas para } \theta$$

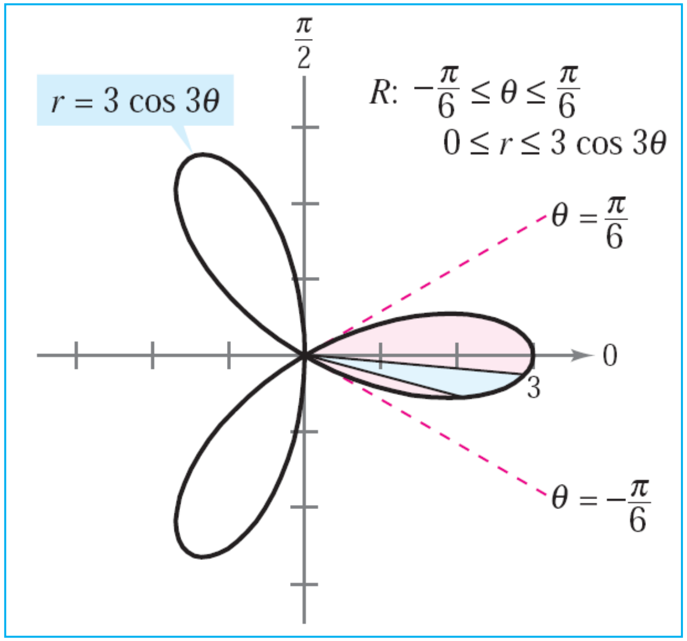
$$0 \leq r \leq 3 \cos 3\theta \qquad \text{Límites o cotas variables para } r$$

Por tanto, él área de un pétalo es:

$$\frac{1}{3}A = \iint_R dA = \int_{-\pi/6}^{\pi/6}\int_0^{3\cos 3\theta} r\,dr\,d\theta = \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{3\cos 3\theta} d\theta$$

$$= \frac{9}{2}\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \cos^2 3\theta\,d\theta = \frac{9}{4}\int_{-\pi/6}^{\pi/6} (1 + \cos 6\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{9}{4}\left[\theta + \frac{1}{6}\operatorname{sen} 6\theta\right]_{-\pi/6}^{\pi/6} = \frac{3\pi}{4}$$



EL ÁREA TOTAL ES $A = 9\pi/4$

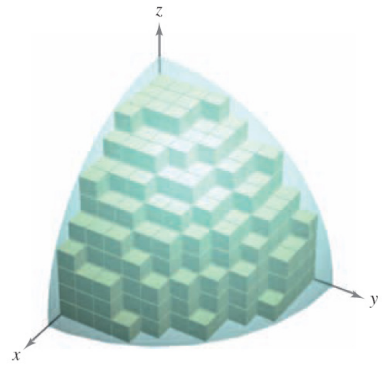
DEFINICIÓN DE INTEGRAL TRIPLE

Si f es continua sobre una región sólida acotada Q, entonces la **integral triple de f sobre Q** se define como

$$\iiint_Q f(x, y, z)\, dV = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\, \Delta V_i$$

siempre que el límite exista.
El **volumen** de la región sólida Q

está dado por ⇨ Volumen de $Q = \iiint_Q dV$



Volumen de $Q \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i$

El procedimiento para **definir una integral triple** es **análogo al utilizado en integrales dobles:**

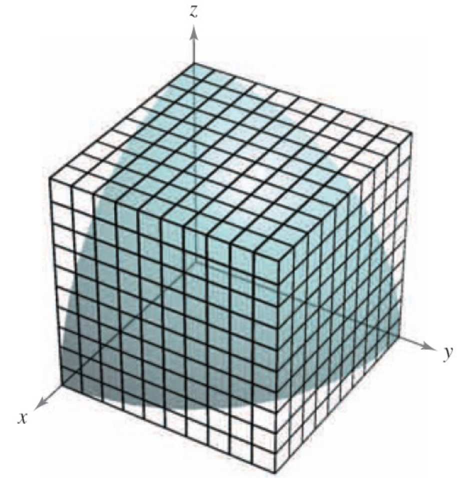
- Considerar una función ***f*** **de tres variables que es continua sobre una región sólida acotada** ***Q***
- Se encierra *Q* en una **red de cubos** y se forma una **partición interna** que consta de todos los cubos que quedan completamente dentro de *Q* → $\Delta V_i = \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$
- **En cada cubo, se elige un punto (x_i, y_i, z_i)** se forma la **suma de Riemann** correspondiente y se toma el **límite** cuando $||\Delta|| \to 0$

Propiedades de las integrales triples:

1. $$\iiint\limits_Q cf(x, y, z)\, dV = c\iiint\limits_Q f(x, y, z)\, dV$$

2. $$\iiint\limits_Q [f(x, y, z) \pm g(x, y, z)]\, dV = \iiint\limits_Q f(x, y, z)\, dV \pm \iiint\limits_Q g(x, y, z)\, dV$$

3. $$\iiint\limits_Q f(x, y, z)\, dV = \iiint\limits_{Q_1} f(x, y, z)\, dV + \iiint\limits_{Q_2} f(x, y, z)\, dV$$



Región sólida Q

NOTA: A la hora de **interpretar las anteriores propiedades**, es necesario **tener en cuenta…**

- ***Q* es la unión de dos subregiones sólidas que no se sobreponen Q_1 y Q_2**
- Si la región sólida ***Q* es simple**, la **integral triple puede evaluarse con una integral iterada** utilizando alguno de los **seis posibles órdenes** de integración: ***dx dy dz, dy dx dz, dz dx dy, dx dz dy, dy dz dx*** y ***dz dy dx***

EVALUACIÓN MEDIANTE INTEGRALES ITERADAS

Sea f continua en una región sólida definida por Q

$$a \leq x \leq b, \quad h_1(x) \leq y \leq h_2(x), \quad g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)$$

donde h_1, h_2, g_1 y g_2 son funciones continuas. Entonces,

$$\iiint_Q f(x, y, z)\, dV = \int_a^b \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

NOTA:

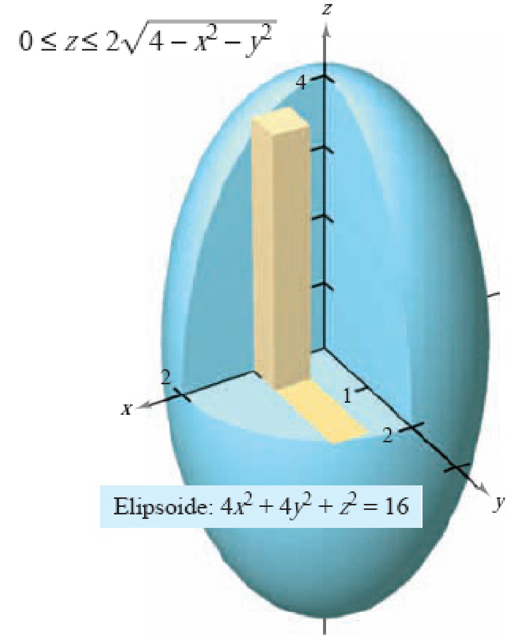
- Esta versión del **teorema de Fubini** describe una **región que es considerada simple con respecto a *dz dy dx*** → para los **otros cinco órdenes** pueden **formularse descripciones similares**
- Para evaluar una **integral iterada triple en el orden *dz dy dx***, se mantienen ***x* e *y* constantes para la integración más interior**, después, se mantiene ***x* constante para la segunda integración**

Ejemplo: Integral triple para halla un volumen

Hallar el volumen del elipsoide

x e *y* juegan papeles similares → se elige arbitrariamente *dz dy dx*

Se pueden **simplificar los cálculos considerando sólo la porción del elipsoide del primer octante**

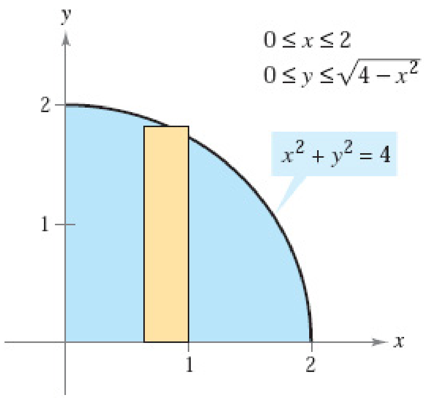


Volumen del elipsoide:

$$V = \iiint_Q dV = 8\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\int_0^{2\sqrt{4-x^2-y^2}} dz\,dy\,dx = 8\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}} z\Big]_0^{2\sqrt{4-x^2-y^2}} dy\,dx$$

$$= 16\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{(4-x^2)-y^2}\,dy\,dx = 8\int_0^2 [0+(4-x^2)\operatorname{arcsen}(1)-0-0]\,dx$$

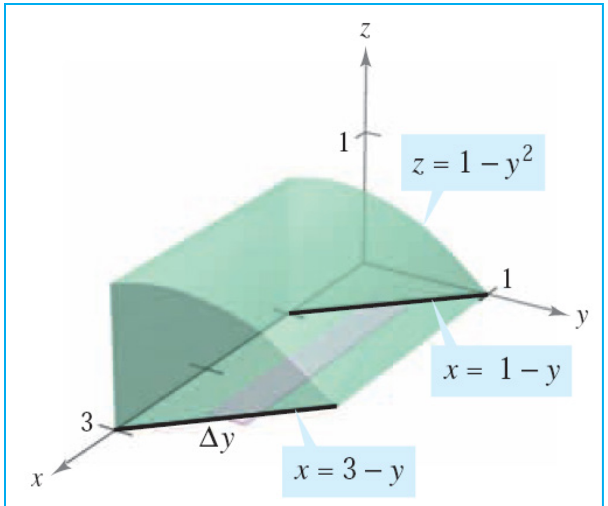
$$= 8\int_0^2 (4-x^2)\left(\frac{\pi}{2}\right)dx = 4\pi\left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{64\pi}{3}$$



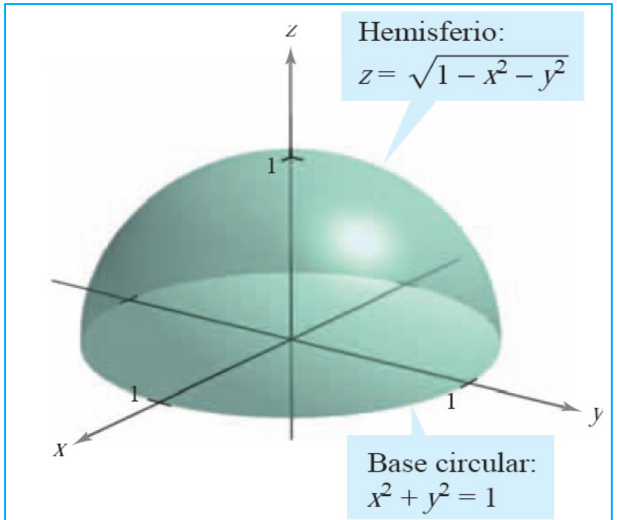
Integrales triples:
Introducción a las integrales triples V

Ejemplo: Determinación de los límites de integración

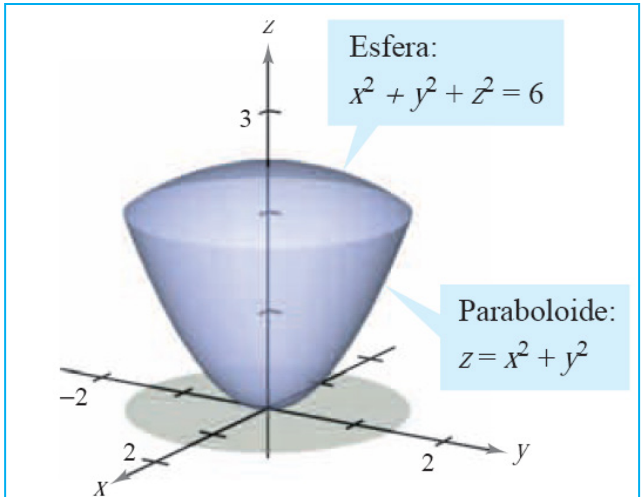
Dar una integral triple para el volumen de cada una de las siguientes regiones sólidas



Q: $0 \le z \le 1 - y^2$
$1 - y \le x \le 3 - y$
$0 \le y \le 1$



Q: $0 \le z \le \sqrt{1 - x^2 - y^2}$
$-\sqrt{1 - y^2} \le x \le \sqrt{1 - y^2}$
$-1 \le y \le 1$



Q: $x^2 + y^2 \le z \le \sqrt{6 - x^2 - y^2}$
$-\sqrt{2 - x^2} \le y \le \sqrt{2 - x^2}$
$-\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}$

$$V = \iiint_Q dV = \int_0^1 \int_{1-y}^{3-y} \int_0^{1-y^2} dz\, dx\, dy$$

$$V = \iiint_Q dV = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz\, dx\, dy$$

$$V = \iiint_Q dV = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{6-x^2-y^2}} dz\, dy\, dx$$

Regiones **sólidas comunes** como esferas, elipsoides o conos, pueden dar lugar a **integrales triples difíciles** de calcular en coordenadas rectangulares → **coordenadas cilíndricas y esféricas**

RECORDAR cómo se realiza la **conversión a COORDENADAS CILÍNDRICAS:** ***x* = *r* cos *ϑ*, *y* = *r* sen *ϑ*, *z*= *z***

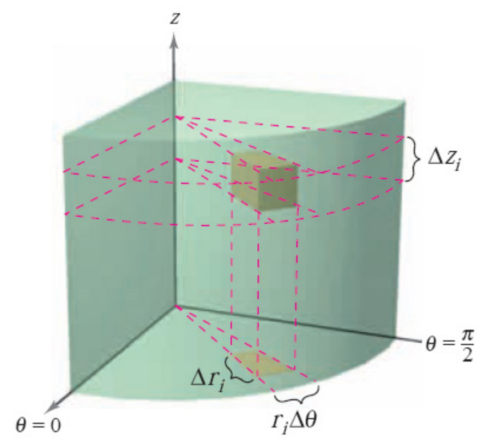
En este sistema de coordenadas, la **región sólida más simple** es un **bloque cilíndrico** determinado por:

$$r_1 \le r \le r_2, \quad \theta_1 \le \theta \le \theta_2, \quad z_1 \le z \le z_2$$

→ Volumen del bloque cilíndrico: $\Delta V_i = r_i \Delta r_i \Delta \theta_i \Delta z_i$

Para expresar una integral triple por medio de coordenadas cilíndricas, supóngase que Q es una región sólida cuya **proyección *R* sobre el plano *xy*** puede describirse en **coordenadas polares**, es decir:

$$Q = \{(x, y, z): (x, y) \text{ está en } R, \quad h_1(x, y) \le z \le h_2(x, y)\}$$
$$R = \{(r, \theta): \theta_1 \le \theta \le \theta_2, \quad g_1(\theta) \le r \le g_2(\theta)\}$$



Si f es una función continua sobre el sólido Q:

$$\iiint_Q f(x, y, z)\, dV = \iint_R \left[\int_{h_1(x, y)}^{h_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz\right] dA$$

→ **Integral triple de *f* sobre *Q***

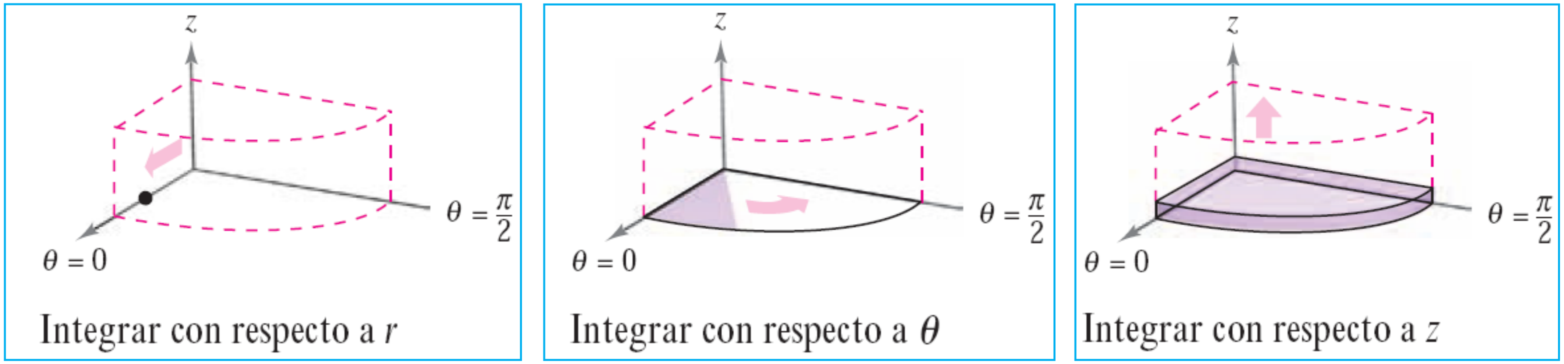
Si por ejemplo, ***R* es *r-simple***, la **forma iterada de la integral triple en forma cilíndrica** es:

$$\iiint_Q f(x, y, z)\, dV = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} \int_{h_1(r\cos\theta,\, r\,\mathrm{sen}\,\theta)}^{h_2(r\cos\theta,\, r\,\mathrm{sen}\,\theta)} f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, z) r\, dz\, dr\, d\theta$$

NOTA: Éste es **uno de los seis posibles órdenes de integración** → los **otros cinco** son ***dz dϑ dr*, *dr dz dϑ*, *dr dϑ dz*, *dϑ dz dr*** y ***dϑ dr dz***

Para visualizar un orden de integración determinado es útil contemplar la **integral iterada** en términos de **tres movimientos de barrido**, cada uno de los cuales agrega una dimensión al sólido

Ejemplo: orden de integración ***dr dϑ dz***

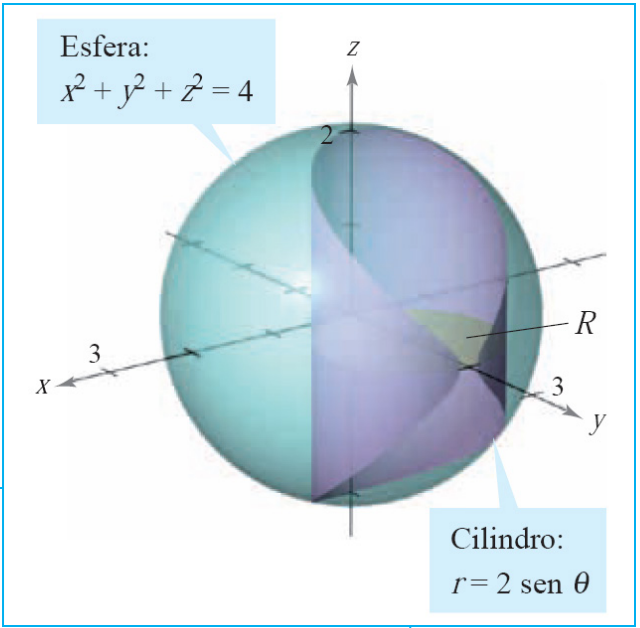


Ejemplo: Hallar el volumen empleando coordenadas cilíndricas

Hallar el volumen de la región sólida *Q* que corta en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ el cilindro $r = 2$ sen ϑ

Como $x^2 + y^2 + z^2 = r^2 + z^2 = 4$, los **límites o cotas de *z*** son:

$$-\sqrt{4 - r^2} \leq z \leq \sqrt{4 - r^2}$$



Sea ***R* la proyección circular del sólido sobre el plano *r*ϑ**

Los **límites o cotas de *R*** son:

$$0 \leq r \leq 2 \text{ sen } \theta \text{ y } 0 \leq \theta \leq \pi$$

Por tanto, el **volumen de *Q*** es:

$$V = \int_0^{\pi} \int_0^{2 \text{ sen } \theta} \int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} r \, dz \, dr \, d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2 \text{ sen } \theta} 2r\sqrt{4 - r^2} \, dr \, d\theta$$

$$= 2 \int_0^{\pi/2} -\frac{2}{3}(4 - r^2)^{3/2} \Big]_0^{2 \text{ sen } \theta} d\theta = \frac{32}{3} \int_0^{\pi/2} [1 - (\cos \theta)(1 - \text{sen}^2 \theta)] \, d\theta = \frac{16}{9}(3\pi - 4)$$

Las integrales triples que involucran esferas o conos son a menudo **más fáciles de calcular** mediante la **conversión a coordenadas esféricas**

RECORDAR cómo se realiza la conversión a **COORDENADAS ESFÉRICAS:**

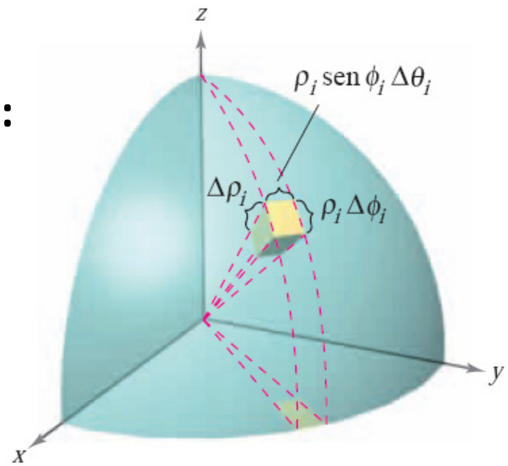
$x = \rho \operatorname{sen} \varphi \cos \vartheta$

$y = \rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \vartheta$

$z = \rho \cos \varphi$

La región más simple es un bloque esférico determinado por:

$$\{(\rho, \theta, \phi)\colon \rho_1 \le \rho \le \rho_2, \quad \theta_1 \le \theta \le \theta_2, \quad \phi_1 \le \phi \le \phi_2\}$$
donde $\rho_1 \ge 0$, $\theta_2 - \theta_1 \le 2\pi$ y $0 \le \phi_1 \le \phi_2 \le \pi$



Bloque esférico:
$\Delta V_i \approx \rho_i^2 \operatorname{sen} \phi_i \Delta\rho_i \Delta\phi_i \Delta\theta_i$

Por lo que, utilizando el **método habitual** que comprende una **partición interior, una suma y un límite**, la **integral triple en coordenadas esféricas** de una **función continua *f* en la región sólida *Q*** es:

$$\iiint_Q f(x, y, z)\, dV = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{\phi_1}^{\phi_2}\int_{\rho_1}^{\rho_2} f(\rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \rho \cos \phi)\rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

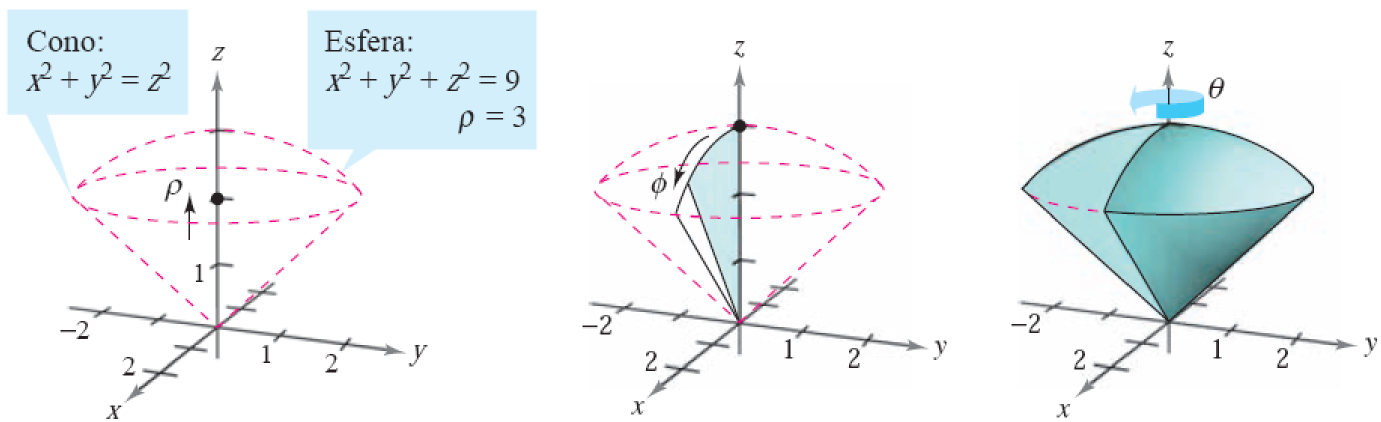
CEU Universidad San Pablo

NOTA: la integral anterior puede modificarse para emplear diferentes órdenes de integración y se puede generalizar a regiones con límites o cotas variables

Las **integrales triples en coordenadas esféricas** se evalúan empleando **integrales iteradas**

Ejemplo:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{3} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$



ρ varía desde 0 hasta 3 mientras ϕ y θ se mantienen constantes

ϕ varía desde 0 hasta $\pi/4$ mientras θ se mantiene constante

θ varía desde 0 hasta 2π

Ejemplo: Hallar el volumen de una región sólida utilizando coordenadas esféricas

Hallar el volumen de la región sólida Q limitada o acotada inferiormente por la hoja superior del cono $z^2 = x^2 + y^2$ y superiormente por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

En **coordenadas esféricas**, la **ecuación de la esfera** es:

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 9 \Rightarrow \rho = 3$$

La **esfera y el cono se cortan** cuando:

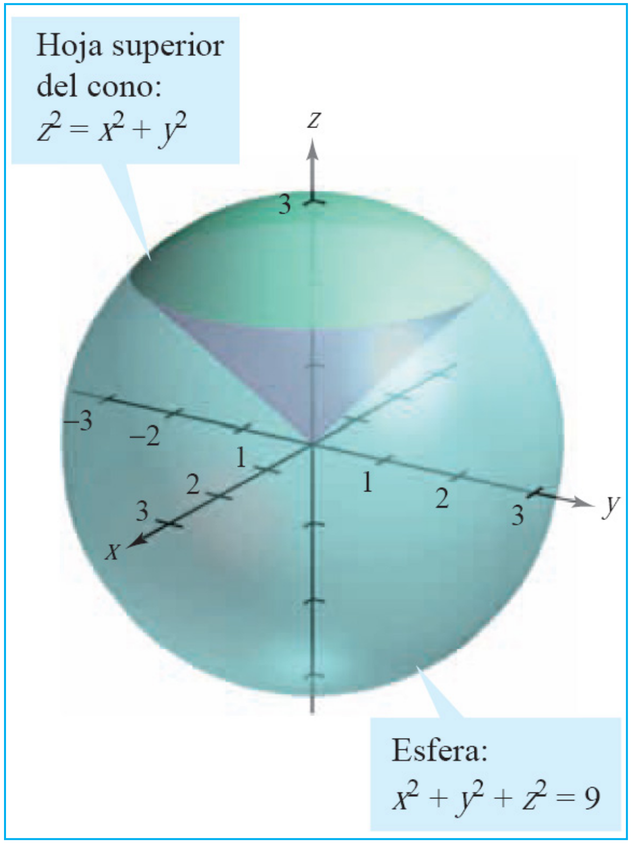
$$(x^2 + y^2) + z^2 = (z^2) + z^2 = 9 \Rightarrow z = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

y como ***z* = *ρ* cos *φ* se tiene que:**

$$\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \cos\phi \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{4}$$

Por tanto, **el volumen es:**

$$V = \iiint_Q dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^3 \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = 9\pi\left(2 - \sqrt{2}\right)$$



En **una integral simple** se puede hacer un **cambio de variables** de manera que ***x* = *g*(*u*),** con lo que ***dx* = *g'*(*u*) *du***, y se obtiene:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(g(u))g'(u)\,du} \Rightarrow \boxed{a = g(c) \text{ y } b = g(d)}$$

En el **caso de las integrales dobles**, el **cambio de variables *x* = *g*(*u, v*)** e ***y* = *h*(*u, v*)** introduce un factor llamado **jacobiano de *x* e *y* con respecto a *u* y *v***

DEFINICIÓN DEL JACOBIANO

Si $x = g(u, v)$ y $y = h(u, v)$, entonces el **jacobiano** de x y y con respecto a u y v, denotado por $\partial(x, y)/\partial(u, v)$, es

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}$$

$$\iint_R f(x, y)\,dA = \iint_S f(g(u, v), h(u, v)) \underbrace{\left| \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} \right|}_{\text{Jacobiano}} du\,dv$$

El **cambio de variables de coordenadas rectangulares a polares** en una **integral doble** se puede escribir como

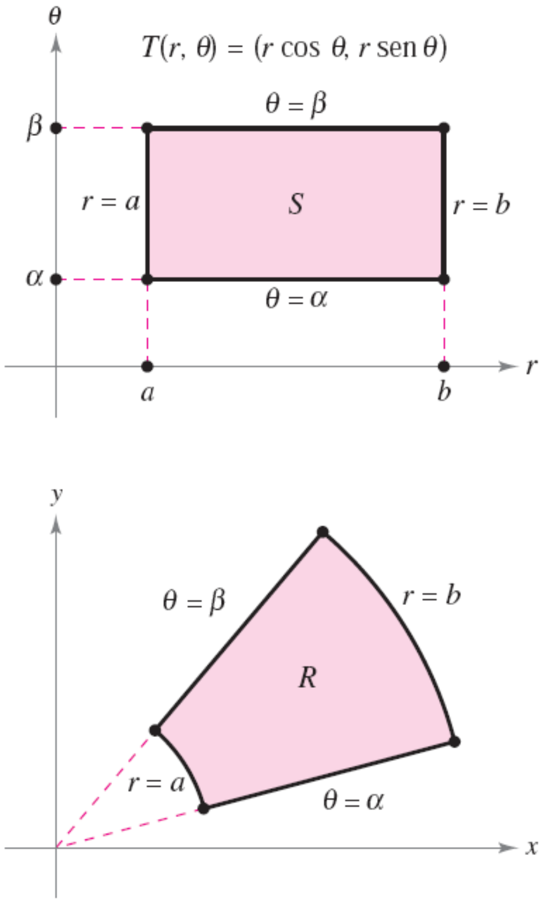
$$\int_R\int f(x, y)\, dA = \int_S\int f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) r\, dr\, d\theta,\quad r > 0$$
$$= \int_S\int f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}\right| dr\, d\theta$$

donde *S* es la región en el plano *rϑ* que corresponde a la región *R* en el plano *xy*

NOTA: En general, un **cambio de variables** está dado por una **transformación biyectiva** (o uno a uno) *T* de una región *S* en el plano *uv* en una región *R* en el plano *xy* dada por

$$T(u, v) = (x, y) = (g(u, v), h(u, v))$$

donde *g* y *h* tienen primeras derivadas parciales continuas en *S*



S es la región en el plano *rθ* que corresponde a *R* en el plano *xy*

Ejemplo: Hallar un cambio de variables para simplificar una región

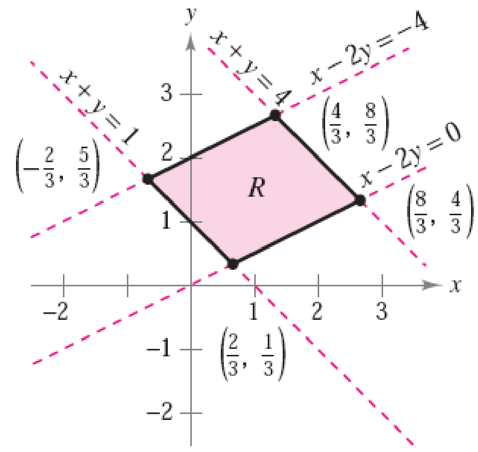
Sea R la región limitada o acotada por las rectas $x - 2y = 0$, $x - 2y = -4$, $x + y = 4$ y $x + y = 1$

Hallar una **transformación *T* de una región *S* a *R* tal que *S* sea una región rectangular** (con lados paralelos a los ejes *u* o *v*)

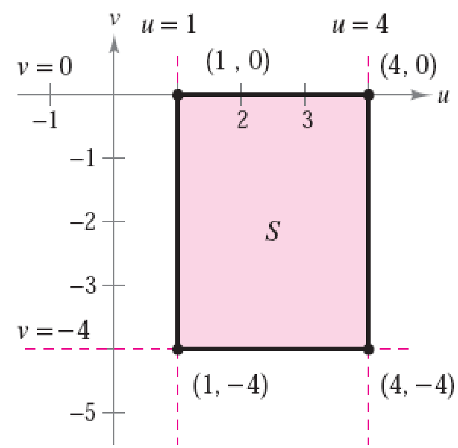
Sea $\boldsymbol{u = x + y}$ y $\boldsymbol{v = x - 2y}$, se obtiene $T(u, v) = (x, y)$ donde:

$$\boxed{T(u, v) = (x, y) = \left(\frac{1}{3}[2u + v], \frac{1}{3}[u - v]\right)}$$

Límites en el plano xy		*Límites en el plano uv*
$x + y = 1$	⇨	$u = 1$
$x + y = 4$	⇨	$u = 4$
$x - 2y = 0$	⇨	$v = 0$
$x - 2y = -4$	⇨	$v = -4$



Región *R* en el plano *xy*



Región *S* en el plano *uv*

CAMBIO DE VARIABLES EN INTEGRALES DOBLES

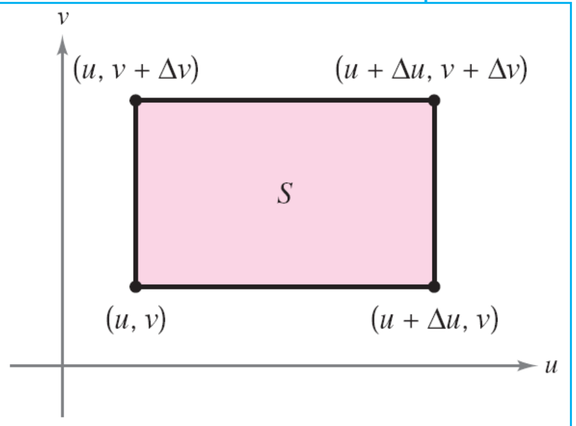
Sea R una región vertical u horizontalmente sencilla en el plano xy y sea S una región vertical u horizontalmente sencilla en el plano uv. Sea T desde S hasta R dado por $T(u, v) = (x, y) = (g(u, v), h(u, v))$, donde g y h tienen primeras derivadas parciales continuas. Suponer que T es uno a uno excepto posiblemente en la frontera de S. Si f es continua en R y $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ no es cero en S, entonces

$$\int_R\int f(x, y)\,dx\,dy = \int_S\int f(g(u, v), h(u, v))\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\,dv$$

Demostración:

Considerar el caso en el que *S* es una región rectangular en el plano *uv*. **Si Δ*u* y Δ*v* son pequeños**, la **continuidad de *g* y de *h*** implica que ***R* es aproximadamente un paralelogramo** cuya **área** es:

$$\Delta A \approx \left\|\overrightarrow{MN} \times \overrightarrow{MQ}\right\|$$



Área de $S = \Delta u\,\Delta v$
$\Delta u > 0,\ \Delta v > 0$

Cambio de variables – Jacobianos:
Cambio de variables en integrales dobles II

Demostración (continuación):

Para **Δu y Δv pequeños, las derivadas parciales de *g* y *h*** con **respecto a *u*** pueden ser aproximadas por:

$$g_u(u, v) \approx \frac{g(u + \Delta u, v) - g(u, v)}{\Delta u} \quad \text{y} \quad h_u(u, v) \approx \frac{h(u + \Delta u, v) - h(u, v)}{\Delta u}$$

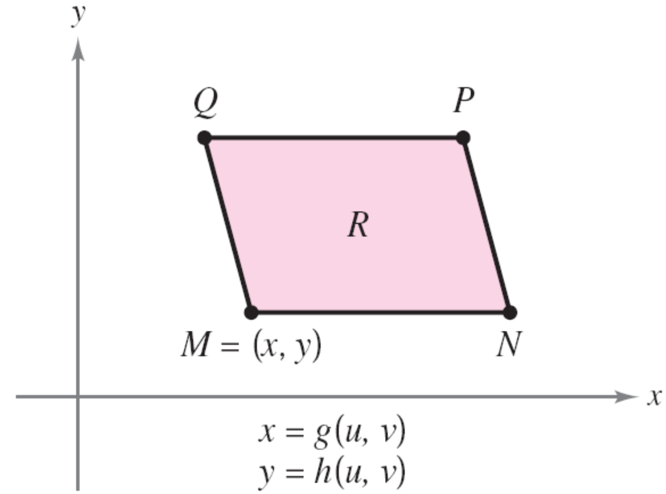
por lo que $\Longrightarrow$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= [g(u + \Delta u, v) - g(u, v)]\mathbf{i} + [h(u + \Delta u, v) - h(u, v)]\mathbf{j}\\ &\approx [g_u(u, v)\,\Delta u]\mathbf{i} + [h_u(u, v)\,\Delta u]\mathbf{j} = \frac{\partial x}{\partial u}\Delta u\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u\mathbf{j}\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{MN} \times \overrightarrow{MQ} \approx \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u}\Delta u & \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v}\Delta v & \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \Delta u\,\Delta v\mathbf{k}$$

$$\Delta A \approx \|\overrightarrow{MN} \times \overrightarrow{MQ}\| \approx \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| \Delta u\,\Delta v \Rightarrow dA \approx \|\overrightarrow{MN} \times \overrightarrow{MQ}\| \approx \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\,dv$$

$$\int_R\int f(x, y)\,dx\,dy = \int_S\int f(g(u, v), h(u, v))\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\,dv$$



Los vértices en el plano xy son $M(g(u, v), h(u, v))$, $N(g(u + \Delta u, v), h(u + \Delta u, v))$, $P(g(u + \Delta u, v + \Delta v), h(u + \Delta u, v + \Delta v))$ y $Q(g(u, v + \Delta v), h(u, v + \Delta v))$.

Ejemplo: Un cambio de variables para simplificar un integrando

Sea *R* la región limitada por el cuadrado cuyos vértices son (0, 1), (1, 2), (2, 1) y (1, 0). Evaluar la siguiente integral:

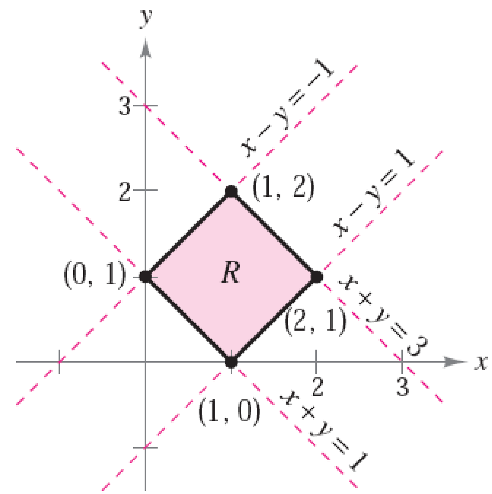
$$\int_R\int (x+y)^2 \operatorname{sen}^2(x-y)\, dA$$

Los **lados de *R*** se encuentran **sobre las rectas *x* + *y* = 1, *x* – *y* = 1, *x* + *y* = 3** y ***x* – *y* = -1** → haciendo ***u* = *x* + *y*** y ***v* = *x* – *y***, se tiene que los **límites de S** en el **plano *uv*** son **1 ≤ *u* ≤ 3 y -1 ≤ *v* ≤ 1**

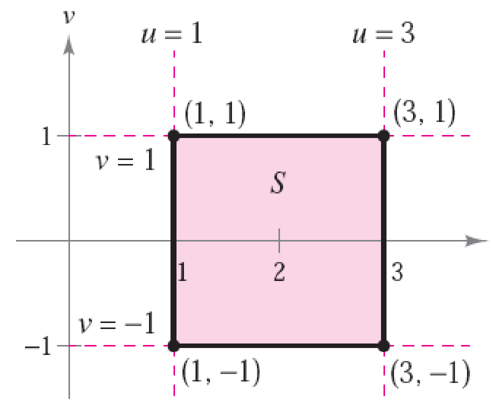
$$x = \frac{1}{2}(u+v) \qquad \text{y} \qquad y = \frac{1}{2}(u-v)$$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = -\frac{1}{2}$$

$$\int_R\int (x+y)^2 \operatorname{sen}^2(x-y)\, dA = \int_{-1}^{1}\int_{1}^{3} u^2 \operatorname{sen}^2 v\left(\frac{1}{2}\right) du\, dv = \frac{13}{6}(2 - \operatorname{sen} 2)$$



Región *R* en el plano *xy*



Región *S* en el plano *uv*

Al finalizar este capítulo, debemos ser capaces de…

- Evaluar una **integral iterada**
- Utilizar **una integral iterada para hallar el área de una región plana**
- Utilizar una **integral doble para representar el volumen de una región sólida**
- Utilizar las **propiedades de las integrales dobles**
- Evaluar una **integral doble como una integral iterada**
- Expresar y evaluar **integrales dobles en coordenadas polares**
- Utilizar una **integral triple** para calcular el **volumen de una región sólida**
- Expresar y evaluar una **integral triple en coordenadas cilíndricas y esféricas**
- Utilizar **jacobianos** para **cambiar variables en una integral doble**