TEMA 6: ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

FMIBII – Curso 2016/2017

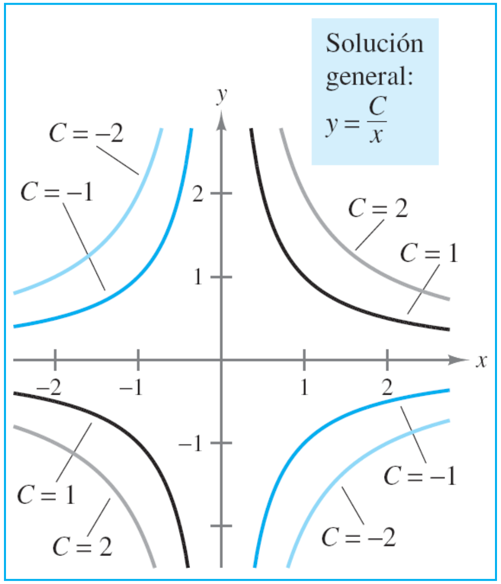
Biomedical engineering degree

Cristina Sánchez López de Pablo
Universidad San Pablo CEU
Madrid

TEMA 6: ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Muchos fenómenos físicos se pueden describir por medio de ECUACIONES DIFERENCIALES

- Una **ecuación diferencial** en ***x*** e ***y*** es una ecuación que **incluye:**
  - ***x*, *y***
  - **derivadas de *y***
- Una función ***y* = *f*(*x*)** se denomina **solución de una ecuación diferencial** si la **ecuación se satisface** cuando ***y*** **y sus derivadas se reemplazan por *f*(*x*) y sus derivadas**
- El **orden de la ecuación diferencial** se determina por la **derivada de mayor orden** de la ecuación
- Geométricamente, la **solución general** de una ecuación diferencial **de primer orden** representa una familia de curvas → **curvas solución**
- Las **soluciones particulares** se obtienen de las **condiciones iniciales** que da el valor de la variable dependiente o una de sus derivadas para un valor particular de la variable independiente



Ejemplo: Encontrar una solución particular

Dada la ecuación diferencial $xy' - 3y = 0$, verificar que $y = Cx^3$ es su solución general, y encontrar la solución particular determinada por la condición inicial $y = 2$ cuando $x = -3$

- **Se sabe que $y = Cx^3$ es la solución general**, ya que $y' = 3Cx^2$ y por tanto:

  $xy' - 3y = x(3Cx^2) - 3(Cx^3) = 0$

- Además, la **condición inicial $y = 2$ cuando $x = -3$** lleva a:

  $y = Cx^3$ → Solución general

  $2 = C(-3)^3$ → Se sustituye la condición inicial

  $-2/27 = C$ → Solución para C

- Por último, se puede concluir que la **solución particular** es:

  $y = -2x^3/27$ (se puede verificar al sustituir y e y' en la ecuación diferencial original)

En muchas aplicaciones, el **ritmo o velocidad de cambio de una variable *y*** es **proporcional al valor de *y*** → si **y es una función del tiempo *t***, entonces:

Razón de cambio de y — es — proporcional a y

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

MODELO DE CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO EXPONENCIAL

Si y es una función derivable de t tal que $y > 0$ y $y' = ky$, para alguna constante k, entonces

$$y = Ce^{kt}$$

C es el **valor inicial** de y, y k es la **constante de proporcionalidad**. El **crecimiento exponencial** se produce cuando $k > 0$, y el **decrecimiento** cuando $k < 0$

Demostración:

$y' = ky$	Escribir la ecuación original.
$\dfrac{y'}{y} = k$	Separar variables.
$\displaystyle\int \frac{y'}{y}\,dt = \int k\,dt$	Integrar con respecto a t.
$\displaystyle\int \frac{1}{y}\,dy = \int k\,dt$	$dy = y'\,dt$.
$\ln y = kt + C_1$	Encontrar la antiderivada de cada miembro.
$y = e^{kt}e^{C_1}$	Despejar y.
$y = Ce^{kt}$	Sea $C = e^{C_1}$.

Para **verificar el resultado**, **diferenciar** la función ***y* = *Ce*^{kt}** con respecto a *t* y **comprobar que *y'* = *ky***

Ejemplo: Crecimiento de población

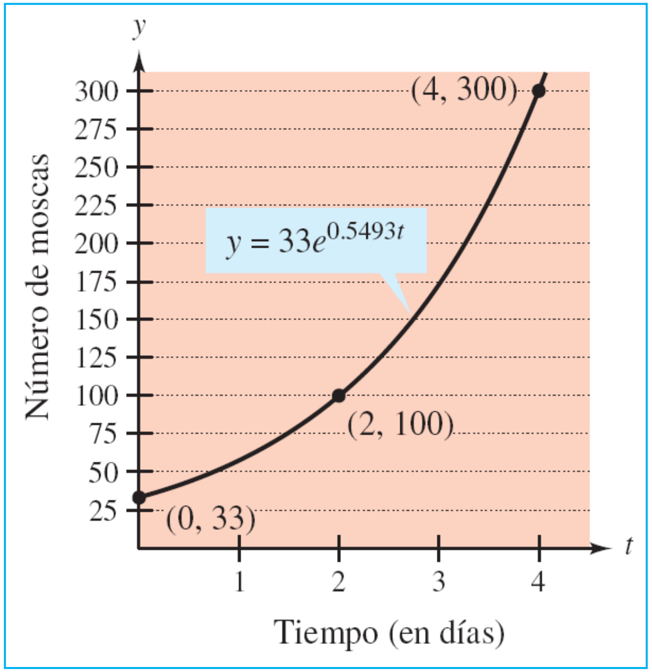
Suponer que **una población experimental de moscas se incrementa conforme a la ley de crecimiento exponencial**. Había **100 moscas al llegar al segundo día de experimento** y **300 moscas al llegar al cuarto día**. ¿Cuántas moscas, aproximadamente, había en la población original?

Sea $y = Ce^{kt}$ el número de moscas en el momento t, donde t se mide en días. Dado que $y = 100$ cuando $t = 2$ e $y = 300$ cuando $t = 4$, tenemos que: $\mathbf{100 = C\,e^{2k}}$ y $\mathbf{300 = C\,e^{4k}}$

Por la primera ecuación, se sabe que $C = 100e^{-2k}$. Al sustituir este valor en la segunda ecuación, se obtiene lo siguiente: $\mathbf{300 = 100\,e^{-2k}\,e^{4k}} \rightarrow \ln 3 = 2k \rightarrow \mathbf{k = 0.5 \ln 3 \approx 0.5493}$

El **modelo de crecimiento exponencial** es: $\mathbf{y = C\,e^{0.5493t}}$

Para resolver C, se re-aplica la condición $y = 100$ cuando $t = 2$: $100 = C\,e^{0.5493(2)} \rightarrow \mathbf{C = 100\,e^{-1.0986} \approx 33}$ **moscas** ($t = 0$)



Considerar una ecuación diferencial que pueda escribirse de la forma:

$$\boxed{M(x) + N(y)\frac{dy}{dx} = 0}$$

donde ***M* es una función continua sólo de *x*** y ***N* es una función continua solo de *y***

Procedimiento de solución → SEPARACIÓN DE VARIABLES:

- Los **términos de *x*** se pueden **agrupar con** los ***dx*** y los **términos de *y*** se pueden **agrupar** con los ***dy*** → **ecuaciones separables**

- Se puede obtener una **solución por integración**

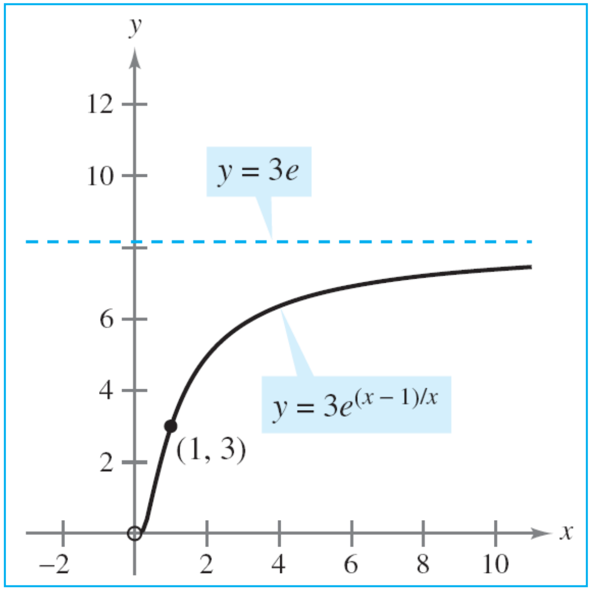
Ejemplo: Encontrar la curva de una solución particular

Encontrar la ecuación de la curva que pasa por el punto (1, 3) y tiene pendiente de y/x^2 en cualquier punto (x, y)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x^2},\ y(1) = 3$$

Separando las variables e integrándolas se tiene:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x^2}, \quad y \neq 0 \Rightarrow \ln|y| = -\frac{1}{x} + C_1 \Rightarrow y = e^{-(1/x)+C_1} = Ce^{-1/x}$$



Dado que $y = 3$ cuando $x = 1$, se concluye que $3 = C\,e^{-1}$ y $C = 3e$

Por tanto, **la ecuación de la curva especificada** es:

$$y = (3e)e^{-1/x} = 3e^{(x-1)/x}, \quad x > 0$$

Ya que la solución no se define en $x = 0$ y la condición inicial se da en $x = 1$, x está restringida a valores positivos

CEU Universidad San Pablo

DEFINICIÓN DE ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL DE PRIMER ORDEN

Una **ecuación diferencial lineal de primer orden** es una ecuación de la forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

donde P y Q son funciones continuas de x. Se dice que esta ecuación diferencial lineal de primer orden es de la **forma normal**.

¿Cómo se resuelve una ecuación diferencial lineal de primer orden?

1. Escribir la ecuación en forma normal para identificar las funciones $P(x)$ y $Q(x)$
2. Integrar $P(x)$ y formar la expresión: $\boxed{u(x) = e^{\int P(x)\,dx}}$ → **FACTOR INTEGRANTE**
3. Obtener la solución general: $\boxed{y = \frac{1}{u(x)} \int Q(x)u(x)\,dx}$ → **SOLUCIÓN GENERAL**

CEU Universidad San Pablo

Ejemplo: Solución de una ecuación diferencial lineal de primer orden

***y'* – *y* tan *t* = 1, -π/2 < *t* < π/2**

La ecuación ya está escrita en su forma normal, de manera que ***P*(*t*) = - tan *t*** y ***Q*(*t*) = 1**

$$\int P(t)\,dt = -\int \tan t\,dt = \ln|\cos t|$$

Como -π/2 < *t* < π/2, se puede concluir que el **factor integrante** es:

$$e^{\int P(t)\,dt} = e^{\ln(\cos t)} = \cos t$$

Así, al multiplicar *y'* – *y* tan *t* = 1 por cos *t*, se obtiene:

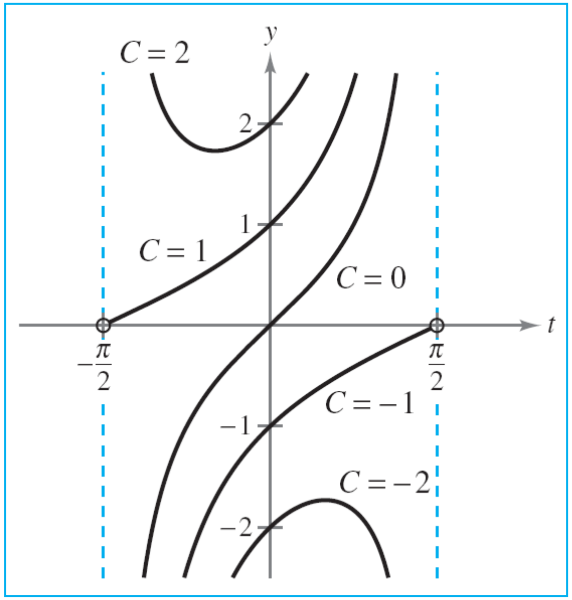
cost *y'* – *y* sen *t* = cos *t* → [*y* cos *t*]' = cos *t*

$$y\cos t = \int \cos t\,dt$$

$$y\cos t = \operatorname{sen} t + C$$

$$y = \tan t + C\sec t$$

→ **Solución general**



Caso particular: Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden con **coeficientes constantes**

$$ay' + by + c = 0$$

$$y' + \frac{b}{a}y + \frac{c}{a} = 0 \rightarrow y' + \frac{b}{a}y = -\frac{c}{a} \rightarrow P(x) = P = \frac{b}{a} \text{ y } Q(x) = Q = -\frac{c}{a}$$

$$u(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{\int \frac{b}{a}dx} = e^{\frac{b}{a}x}$$

$$\left[ye^{\frac{b}{a}x}\right]' = e^{\frac{b}{a}x} \rightarrow y = \frac{1}{e^{\frac{b}{a}x}} \int -\frac{c}{a} e^{\frac{b}{a}x} dx = e^{-\frac{b}{a}x}\left(-\frac{c}{a}\frac{a}{b}e^{\frac{b}{a}x} + K\right)$$

$$y = Ke^{-\frac{b}{a}x} - \frac{c}{b} = y_H + y_P$$

Solución general (*y*) = Solución de la ecuación homogénea (y_H) + Solución particular (y_P)

$$ay'_H + by_H = 0 \rightarrow a\frac{dy_H}{dx} + by_H = 0 \rightarrow \frac{dy_H}{y_H} = -\frac{b}{a}dx \rightarrow \int \frac{dy_H}{y_H} = \int -\frac{b}{a}dx$$

$$ln|y_H| = -\frac{b}{a}x + K' \rightarrow y_H = e^{K'}e^{-\frac{b}{a}x} = Ke^{-\frac{b}{a}x}$$

+

$y_P = -c/b$
satisface la ecuación diferencial original

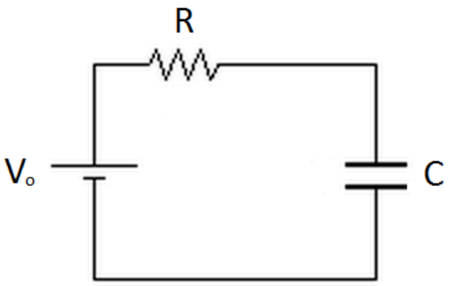
Ejemplo: Proceso de carga y descarga de un condensador

Carga: $V_0 \neq 0$

$$i(t)R + \frac{q(t)}{C} = q'(t)R + \frac{q(t)}{C} = V_0 \to a = R, b = \frac{1}{C} \; y \; c = -V_0$$

$$q(t) = Ke^{-\frac{b}{a}t} - \frac{c}{b} = Ke^{-\frac{t}{RC}} + V_0C$$

$$q(t=0) = 0 \to q(0) = Ke^{0} + V_0C \to K = -V_0C \to q(t) = V_0C\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$



Descarga: $V_0 = 0$ → **ecuación homogénea**

$$i(t)R + \frac{q(t)}{C} = q'(t)R + \frac{q(t)}{C} = 0 \to \int \frac{dq}{q} = \int -\frac{1}{RC}dt$$

$$q(t) = Ke^{-\frac{t}{RC}}$$

$$q(t=0) = V_0C \to \; q(t) = V_0Ce^{-\frac{t}{RC}}$$

En general:

$$q(t) = (CI - CF)e^{-\frac{t}{RC}} + CF$$

CI: condición inicial

CF: condición final

Al finalizar este capítulo, debemos ser capaces de…

- Usar **condiciones iniciales** para encontrar **soluciones particulares** de ecuaciones diferenciales
- Usar **funciones exponenciales para modelar el crecimiento y decrecimiento** en **problemas de aplicación**
- Reconocer y **resolver** las **ecuaciones diferenciales** que se pueden resolver mediante **separación de variables**
- Resolver una **ecuación diferencial lineal de primer orden**
- Usar las **ecuaciones diferenciales lineales** para resolver **problemas de aplicación**