TEMA 4: CÁLCULO DIFERENCIAL EN VARIAS VARIABLES

FMIBII – Curso 2016/2017

Biomedical engineering degree

Cristina Sánchez López de Pablo
Universidad San Pablo CEU
Madrid

TEMA 4: CÁLCULO DIFERENCIAL EN VARIAS VARIABLES

1. **Introducción a las funciones de varias variables**
   - Funciones de varias variables
   - Gráfica de una función de dos variables
2. **Límites y continuidad**
   - Entornos en el plano
   - Límite de una función de dos variables
   - Continuidad de una función de dos variables
   - Continuidad de una función de tres variables
3. **Derivadas parciales**
   - Derivadas parciales de una función de dos variables
   - Derivadas parciales de una función de tres o más variables
   - Derivadas parciales de orden superior

TEMA 4: CÁLCULO DIFERENCIAL EN VARIAS VARIABLES

4. **Diferenciales**
   - Incrementos y diferenciales
   - Diferenciabilidad
   - Aproximación mediante diferenciales
5. **Regla de la cadena para funciones de varias variables**
   - Uso de la regla de la cadena para funciones de varias variables
   - Derivación o diferenciación parcial implícita
6. **Derivadas direccionales y gradientes**
   - Derivada direccional
   - Gradiente de una función de dos variables
   - Aplicaciones del gradiente
   - Funciones de tres variables

TEMA 4: CÁLCULO DIFERENCIAL EN VARIAS VARIABLES

7. **Planos tangentes y rectas normales**
   - Plano tangente y recta normal a una superficie
   - El ángulo de inclinación de un plano

8. **Extremos de funciones de dos variables**
   - Extremos absolutos y extremos relativos
   - El criterio de las segundas derivadas parciales

9. **Aplicaciones de los extremos de funciones de dos variables**
   - Problemas de optimización aplicada

Muchos problemas comunes son funciones de dos o más variables (independientes):

- **Ejemplo:** el trabajo realizado por una fuerza ($W = FD$), o el volumen de un cilindro circular recto ($V = \pi r^2 h$)

NOTACIÓN:

- **Función de dos variables:** $z = f(x, y) = x^2 + xy \rightarrow x, y$: variables independientes
- **Función de tres variables:** $w = f(x, y, z) = x + 2y - 3z \rightarrow x, y, z$: variables independientes

DEFINICIÓN DE UNA FUNCIÓN DE DOS VARIABLES
Sea D un conjunto de pares ordenados de números reales. Si a cada par ordenado (x, y) de D le corresponde un único número real $f(x, y)$, entonces se dice que f es una **función de x y y**. El conjunto D es el **dominio** de f, y el correspondiente conjunto de valores $f(x, y)$ es el **rango** de f.

NOTA: Pueden darse definiciones similares para funciones n variables, donde los dominios consisten en n-adas $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow$ el rango es un conjunto de números reales

Ejemplo: Dominios de funciones de varias variables

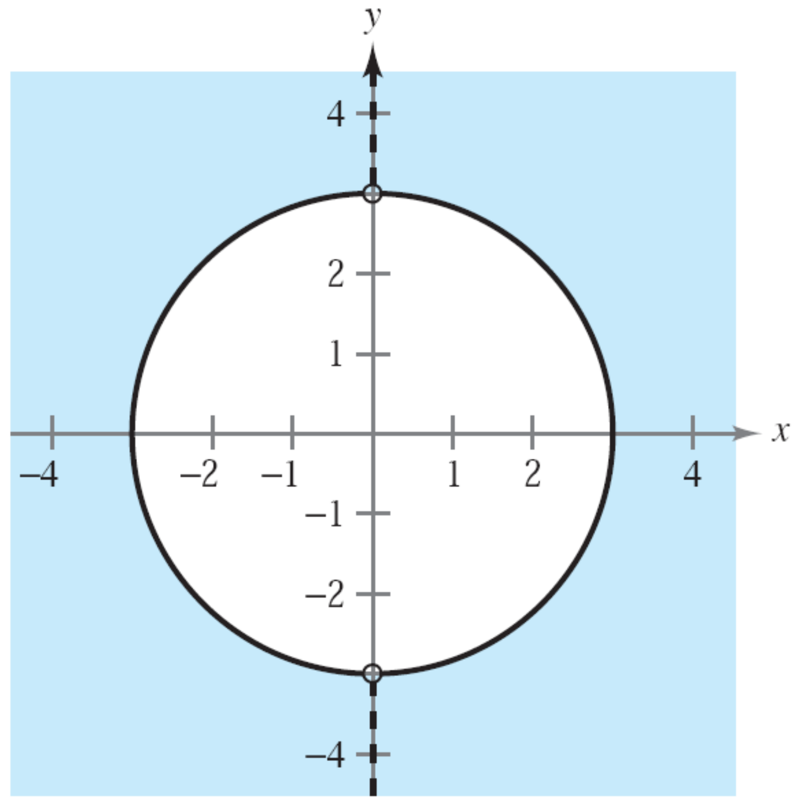
$$\boxed{f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - 9}}{x}}$$

- La función ***f* está definida para** todos los puntos **(*x*, *y*) tales que $x \neq 0$ y $x^2 + y^2 \geq 9$**

- Por tanto, el **dominio** es el conjunto de todos los **puntos que están en el círculo $x^2 + y^2 = 9$, o en su exterior**, con **excepción** de los puntos del **eje *y*** ($x = 0$)

Dominio de

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - 9}}{x}$$



ALGUNAS ACLARACIONES…

Las funciones de varias variables pueden combinarse de la misma manera que las funciones de una sola variable:

$(f \pm g)(x, y) = f(x, y) \pm g(x, y)$	Suma o diferencia
$(fg)(x, y) = f(x, y)g(x, y)$	Producto
$\dfrac{f}{g}(x, y) = \dfrac{f(x, y)}{g(x, y)} \quad g(x, y) \neq 0$	Cociente

NO SE PUEDE formar la **composición de dos funciones de varias variables**

SE PUEDE formar una **función compuesta *g*(*h*(*x, y*))** siendo ***h* una función de varias variables** y ***g* una función de una sola variable**

$(g \circ h)(x, y) = g(h(x, y))$ Composición

Una función que puede expresarse como **suma de funciones de la forma cx^my^n** (donde c es un número real y m y n son enteros no negativos) se llama **función polinomial de varias variables**

Una **función racional** es el **cociente de dos funciones polinomiales**

CEU Universidad San Pablo

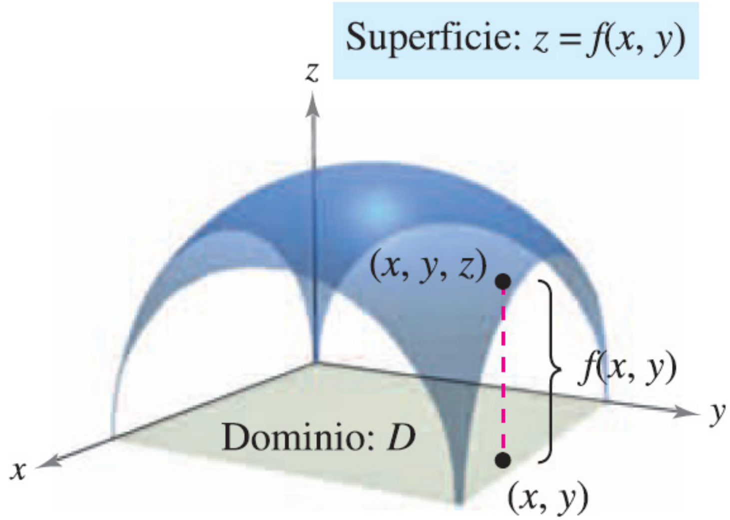
La gráfica de una función de dos variables da mucha información acerca del comportamiento de la función

DEFINICIÓN:

La gráfica de una función f de dos variables es el conjunto de todos los puntos (x, y, z) para los que $z = f(x, y)$ y (x, y) está en el dominio de f → la gráfica puede interpretarse como una superficie en el espacio

La gráfica de $z = f(x, y)$ es una **superficie** cuya **proyección** sobre el plano xy es ***D*, el dominio de *f***

A cada punto (x, y) en D le corresponde un punto (x, y, z) de la superficie y viceversa



Ejemplo: Descripción de la gráfica de una función de dos variables

$$f(x, y) = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}$$

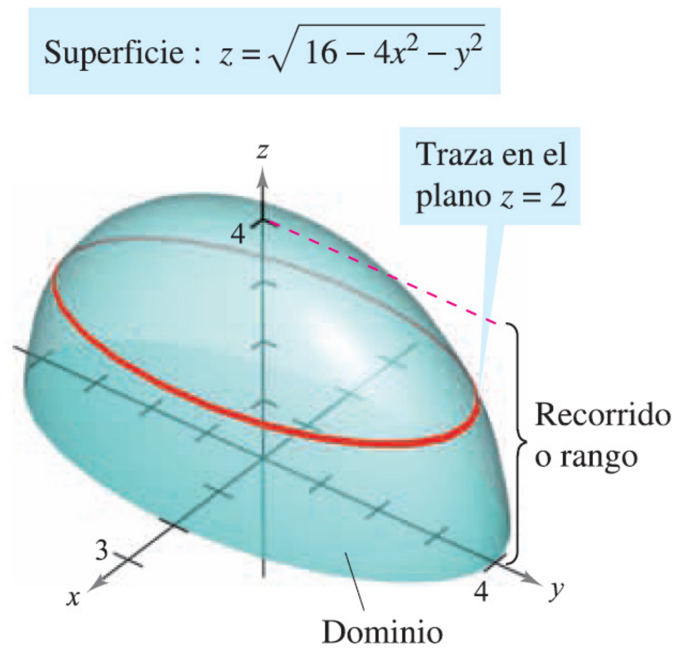
El **dominio *D*** dado por la ecuación de *f* es el conjunto de todos los puntos (*x*, *y*) tales que **$16 - 4x^2 - y^2 \geq 0$** → *D* es el conjunto de todos los **puntos que pertenecen o son interiores a la elipse** dada por:

$$\boxed{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1}$$

El **rango de *f*** está formado por todos los valores ***z* = *f*(*x*, *y*)** tales que **$0 \leq z \leq 4$**

Un punto (*x*, *y*, *z*) está en la gráfica de *f* si y sólo si:

$$\boxed{z = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2} \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{16} = 1, \quad 0 \leq z \leq 4}$$

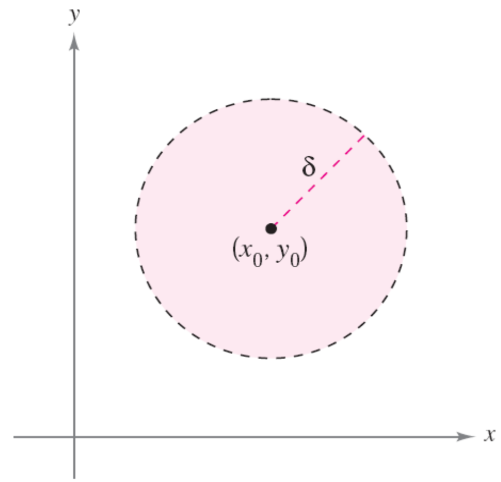


La gráfica de $f(x, y) = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}$ es la mitad superior de un elipsoide

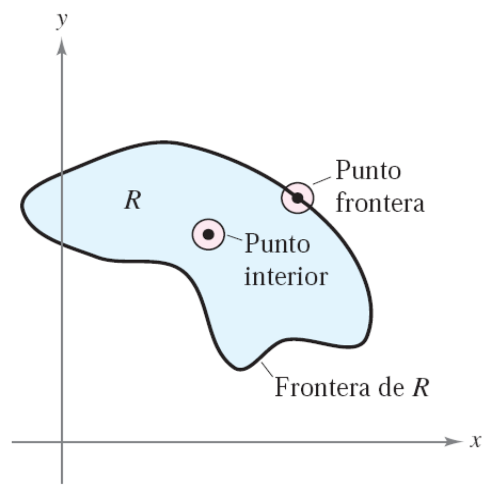
Entorno en el plano = análogo bidimensional de un intervalo

Se define el **entorno δ de (x_0, y_0)** como el **disco con radio $\delta > 0$ centrado en (x_0, y_0)**

$$\left\{(x, y): \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\right\}$$



- Un punto (x_0, y_0) en una región R del plano es **un punto interior** de R si existe un **entorno δ de (x_0, y_0)** que esté **contenido completamente en R**
- Si **todo punto de R es un punto interior**, entonces R es una **región abierta**
- Un **punto (x_0, y_0) es frontera** de R si **todo disco abierto centrado en (x_0, y_0) contiene puntos dentro de R y puntos fuera de R**
- Si una **región contiene todos sus puntos frontera**, la **región** es **cerrada**



DEFINICIÓN DEL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN DE DOS VARIABLES

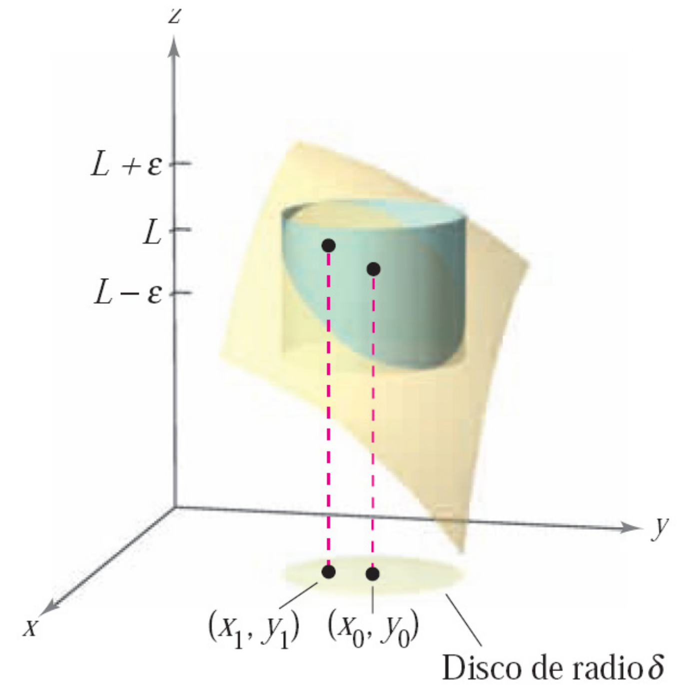
Sea f una función de dos variables definida en un disco abierto centrado en (x_0, y_0), excepto posiblemente en (x_0, y_0), y sea L un número real. Entonces

$$\lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} f(x, y) = L$$

si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$|f(x, y) - L| < \varepsilon \quad \text{siempre que}$$

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$



Gráficamente, esta definición del límite implica que **para todo punto $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ en el disco de radio δ, el valor de $f(x, y)$ está entre $L + \varepsilon$ y $L - \varepsilon$**

NOTA: El punto *(x, y)* puede aproximarse al punto (x_0, y_0) por cualquier dirección

CEU Universidad San Pablo

NOTA: Los límites de funciones de varias variables tienen las mismas propiedades respecto a la suma, diferencia, producto y cociente que los límites de funciones de una sola variable

Ejemplo: Un límite que no existe

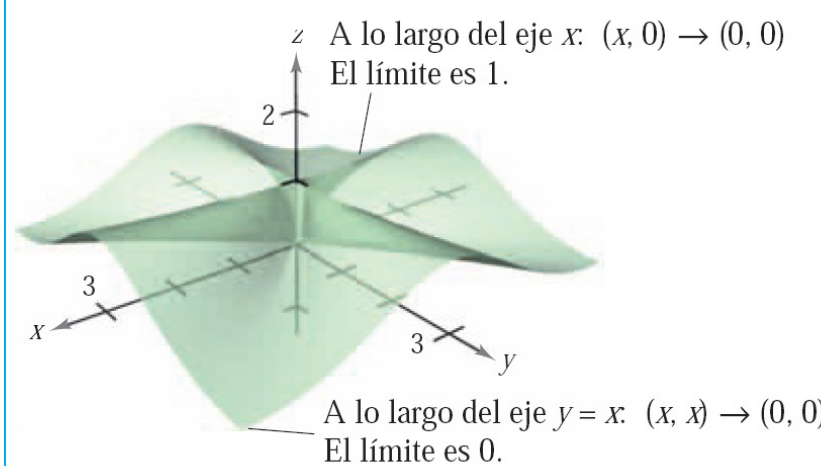
El **dominio** de la función consta de todos los puntos en el **plano *xy* excepto el punto (0, 0)**

$$\lim_{(x,\, y)\to(0,\, 0)} \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right)^2$$

Para demostrar que el límite no existe cuando (*x*, *y*) se aproxima a (0, 0), **se consideran aproximaciones desde dos trayectorias distintas**

$$\lim_{(x,\, 0)\to(0,\, 0)} \left(\frac{x^2 - 0^2}{x^2 + 0^2}\right)^2 = \lim_{(x,\, 0)\to(0,\, 0)} 1^2 = 1$$

$$\lim_{(x,\, x)\to(0,\, 0)} \left(\frac{x^2 - x^2}{x^2 + x^2}\right)^2 = \lim_{(x,\, x)\to(0,\, 0)} \left(\frac{0}{2x^2}\right)^2 = 0$$



Si al aproximarse por dos trayectorias distintas el límite es diferente → **EL LÍMITE NO EXISTE**

DEFINICIÓN DE CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN DE DOS VARIABLES

Una función f de dos variables es **continua en un punto** $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$ de una región abierta R si $f(x_0, y_0)$ es igual al límite de $f(x, y)$ cuando $(x, y) \to (x_0, y_0)$. Es decir,

$$\lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

La función f es **continua en la región abierta** R si es continua en todo punto de R.

FUNCIONES CONTINUAS DE DOS VARIABLES

Si k es un número real y f y g son funciones continuas en (x_0, y_0), entonces las funciones siguientes son continuas en (x_0, y_0).

1. Múltiplo escalar: kf

2. Suma y diferencia: $f \pm g$

3. Producto: fg

4. Cociente: f/g, si $g(x_0, y_0) \neq 0$

NOTA: La continuidad de otros tipos de funciones (ni *polinomiales* ni *racionales*) puede también extenderse de manera natural de una a dos variables

CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN COMPUESTA

Si h es continua en (x_0, y_0) y g es continua en $h(x_0, y_0)$, entonces la función compuesta $(g \circ h)(x, y) = g(h(x, y))$ es continua en (x_0, y_0). Es decir,

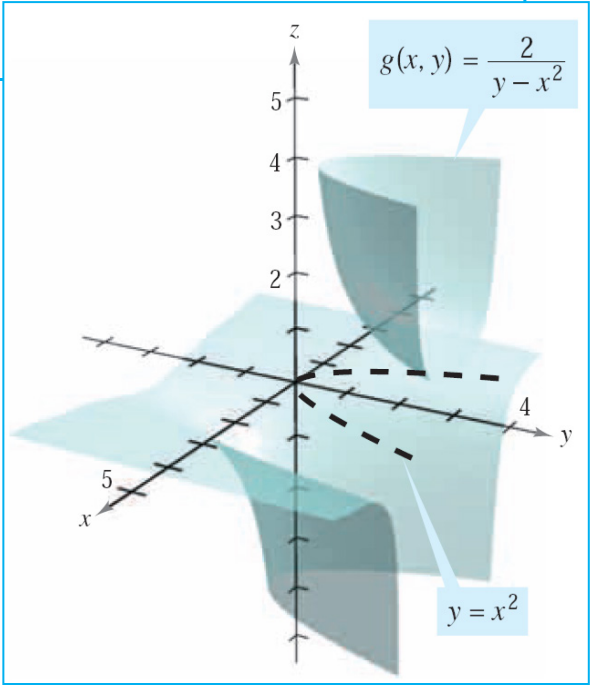
$$\lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} g(h(x, y)) = g(h(x_0, y_0))$$

Ejemplo: Análisis de continuidad

$$g(x, y) = \frac{2}{y - x^2}$$

La **función g(x, y) es continua excepto** en los puntos en los cuales el denominador es 0 → $\boldsymbol{y - x^2 = 0}$

Se puede concluir que la **función es continua excepto** en los puntos en que se encuentra la **parábola** $\boldsymbol{y = x^2}$



DEFINICIÓN DE CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN DE TRES VARIABLES

Una función f de tres variables es **continua en un punto** (x_0, y_0, z_0) de una región abierta R si $f(x_0, y_0, z_0)$ está definido y es igual al límite de $f(x, y, z)$ cuando (x, y, z) se aproxima a (x_0, y_0, z_0). Es decir,

$$\lim_{(x, y, z)\to(x_0, y_0, z_0)} f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0).$$

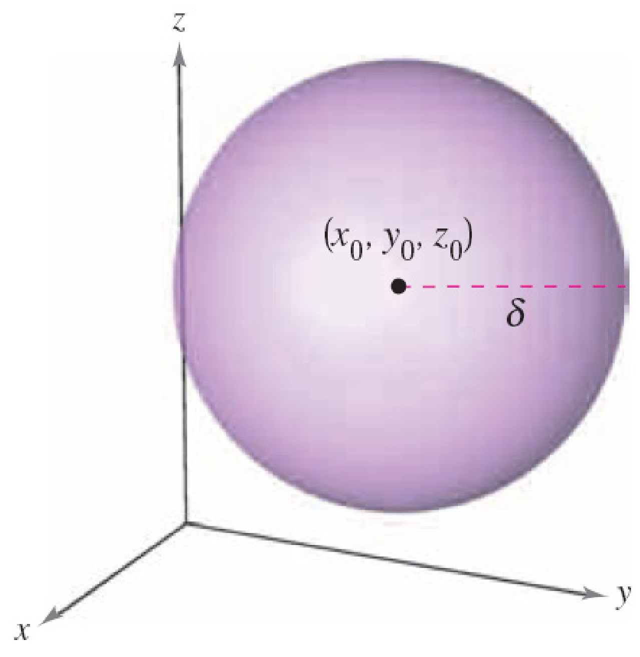
La función f es **continua en una región abierta** R si es continua en todo punto de R

Ejemplo: Continuidad de una función de tres variables

$$f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 - z}$$

La función ***f* es continua** en todo punto del espacio **excepto** en los puntos sobre el **paraboloide** dado por $z = x^2 + y^2$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < \delta^2$$



Esfera abierta en el espacio

¿Cómo se determina la **velocidad o razón de cambio de una función *f*** con **respecto a una de sus variables independientes**? → **DERIVACIÓN PARCIAL**

DEFINICIÓN DE LAS DERIVADAS PARCIALES DE UNA FUNCIÓN DE DOS VARIABLES

Si $z = f(x, y)$, las **primeras derivadas parciales** de f con respecto a x y y son las funciones f_x y f_y definidas por

$$f_x(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$f_y(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

siempre y cuando el límite exista.

NOTA:

- Para hallar f_x se considera ***y* constante** y se **deriva con respecto a *x***
- Para hallar f_y se considera ***x* constante** y se **deriva con respecto a *y***

NOTACIÓN PARA LAS PRIMERAS DERIVADAS PARCIALES

Si $z = f(x, y)$, las derivadas parciales f_x y f_y se denotan por

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = f_x(x, y) = z_x = \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = f_y(x, y) = z_y = \frac{\partial z}{\partial y}$$

Las primeras derivadas parciales evaluadas en el punto (a, b) se denotan por

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(a,\, b)} = f_x(a, b) \qquad \text{y} \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(a,\, b)} = f_y(a, b)$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA: los valores ***df/dx*, *df/dy* en (x_0, y_0, z_0)** denotan las **pendientes de la superficie en las direcciones de *x* e *y***, respectivamente

Ejemplo: Hallar las pendientes de una superficie en las direcciones de *x* y de *y*

Hallar las pendientes de $f(x, y)$ en el punto (1/2, 1, 2)

$$f(x, y) = -\frac{x^2}{2} - y^2 + \frac{25}{8}$$

Las derivadas parciales de *f* son:

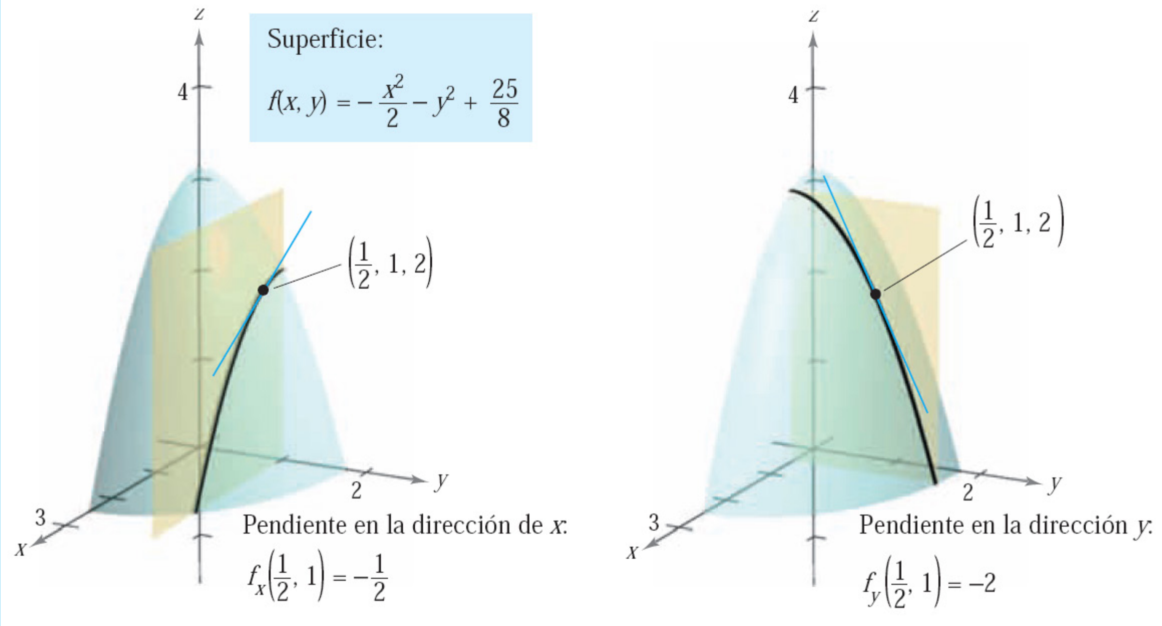
- $f_x(x, y) = -x$
- $f_y(x, y) = -2y$

En la dirección *x*, la pendiente es:

- $f_x(1/2, 1) = -1/2$

En la dirección *y*, la pendiente es:

- $f_y(1/2, 1) = -2$



Ejemplo: Derivadas parciales como velocidades o razones de cambio

El **área de un paralelogramo** con lados adyacentes a y b entre los que se forma un triángulo ϑ está dada por $\boldsymbol{A = ab}$ **sen** $\boldsymbol{\vartheta}$

a) Hallar la tasa o **razón de cambio de *A* respecto de *a*** si $a = 10$, $b = 20$ y $\vartheta = \pi/6$

b) Hallar la tasa o **razón de cambio de *A* respecto de $\boldsymbol{\vartheta}$** si a = 10, $b = 20$ y $\vartheta = \pi/6$

a) Se deriva respecto a *a* manteniendo constantes *b* y $\boldsymbol{\vartheta}$

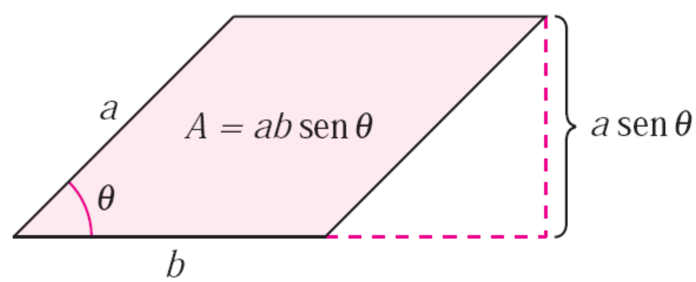
$$\frac{\partial A}{\partial a} = b \operatorname{sen} \theta \qquad \text{Derivada parcial respecto a } a$$

$$\frac{\partial A}{\partial a} = 20 \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = 10 \qquad \text{Sustituir a } b \text{ y } \theta$$

b) Se deriva respecto a $\boldsymbol{\vartheta}$ manteniendo constantes *a* y *b*

$$\frac{\partial A}{\partial \theta} = ab \cos \theta \qquad \text{Derivada parcial respecto de } \theta$$

$$\frac{\partial A}{\partial \theta} = 200 \cos \frac{\pi}{6} = 100\sqrt{3} \qquad \text{Sustituir } a, b \text{ y } \theta$$



El área del paralelogramo es ab sen θ

El **concepto de derivada parcial** puede **extenderse** de manera natural a **funciones de tres o más variables**

DERIVADAS PARCIALES EN FUNCIONES DE TRES VARIABLES → *w* = *f*(*x*, *y*, *z*)

$$\frac{\partial w}{\partial x} = f_x(x, y, z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = f_y(x, y, z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = f_z(x, y, z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z}$$

DERIVADAS PARCIALES EN FUNCIONES DE *n* VARIABLES → $w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$$\frac{\partial w}{\partial x_k} = f_{x_k}(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

La función $z = f(x, y)$ tiene las siguientes derivadas parciales de segundo orden

1. Derivar dos veces con respecto a x:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}$$

2. Derivar dos veces con respecto a y:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$$

3. Derivar primero con respecto a x y luego con respecto a y:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}$$

4. Derivar primero con respecto a y y luego con respecto a x:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx}$$

- Las **derivadas de orden superior** se **denotan** por el **orden al que se hace la derivación**
- Los casos **tercero y cuarto** se llaman **derivadas parciales mixtas (cruzadas)**

CEU Universidad San Pablo

Ejemplo: Hallar las derivadas parciales de segundo orden

Hallar las derivadas parciales de f y determinar el valor de f_{xy} (-1, 2)

$f(x, y) = 3xy^2 - 2y + 5x^2y^2$

En primer lugar, se calculan las derivadas parciales de primer orden con respecto a *x* e *y*:

$$f_x(x, y) = 3y^2 + 10xy^2 \qquad \text{y} \qquad f_y(x, y) = 6xy - 2 + 10x^2y$$

Después se deriva cada una de éstas con respecto a x y con respecto a y:

$$f_{xx}(x, y) = 10y^2 \qquad \text{y} \qquad f_{yy}(x, y) = 6x + 10x^2$$

$$f_{xy}(x, y) = 6y + 20xy \qquad \text{y} \qquad f_{yx}(x, y) = 6y + 20xy$$

En (-1, 2) el valor de f_{xy} es f_{xy} (-1, 2) = 12 – 40 = - 28

IGUALDAD DE LAS DERIVADAS PARCIALES MIXTAS

Si f es una función de x y y tal que f_{xy} y f_{yx} son continuas en un disco abierto R, entonces, para todo (x, y) en R,

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y).$$

NOTA:

- Este teorema también se **aplica a una función *f* de tres o más variables** siempre y cuando las **derivadas parciales de segundo orden sean continuas**
- Por **ejemplo**, si ***w* = *f*(*x*, *y*, *z*)** y todas sus **derivadas parciales de segundo orden son continuas en una región abierta *R***, entonces **en todo punto en R**, el **orden de derivación** para obtener las **derivadas parciales mixtas de segundo orden** es **irrelevante**

¿Cómo se definen incrementos y diferenciales en funciones de dos o más variables?

Si **Δx y Δy son los incrementos en x y en y de $z = f(x, y)$,** el **incremento en z** está dado por:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

DEFINICIÓN DE DIFERENCIAL TOTAL

Si $z = f(x, y)$ y Δx y Δy son los incrementos en x y en y, entonces las **diferenciales** de las variables independientes x y y son

$$dx = \Delta x \qquad \text{y} \qquad dy = \Delta y$$

y la **diferencial total** de la variable dependiente z es

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = f_x(x, y)\,dx + f_y(x, y)\,dy$$

Esta definición puede extenderse a una función más variables → Por ejemplo: ***w* = *f*(*x*, *y*, *z*, *u*)**

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz + \frac{\partial w}{\partial u}du$$

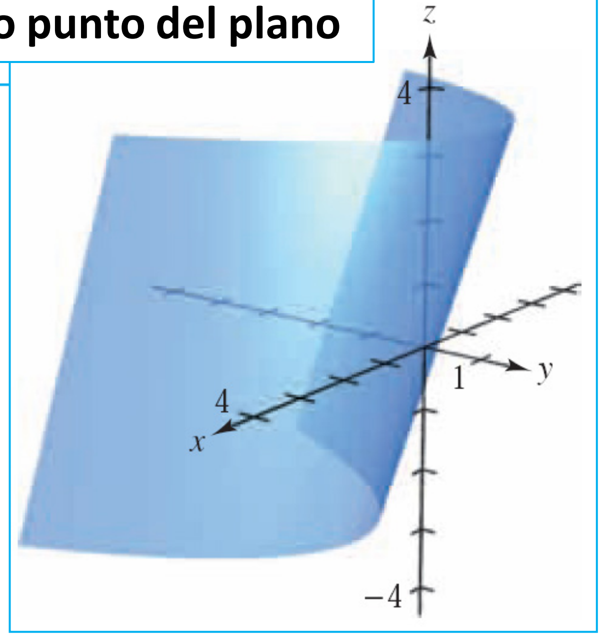
DEFINICIÓN DE DIFERENCIABILIDAD

Una función f dada por $z = f(x, y)$ es **diferenciable** en (x_0, y_0) si Δz puede expresarse en la forma

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\,\Delta x + f_y(x_0, y_0)\,\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

donde ε_1 y $\varepsilon_2 \to 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$
La función f es **diferenciable en una región R** si es diferenciable en todo punto de R.

***f* es diferenciable en todo punto del plano**



Ejemplo: Demostrar que una función es diferenciable

$$f(x, y) = x^2 + 3y$$

$$\begin{aligned}
\Delta z &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \qquad \text{Incremento de } z\\
&= (x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) + 3(y + \Delta y) - (x^2 + 3y)\\
&= 2x(\Delta x) + 3(\Delta y) + \Delta x(\Delta x) + 0(\Delta y)\\
&= f_x(x, y)\,\Delta x + f_y(x, y)\,\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y
\end{aligned}$$

CONDICIONES SUFICIENTES PARA LA DIFERENCIABILIDAD

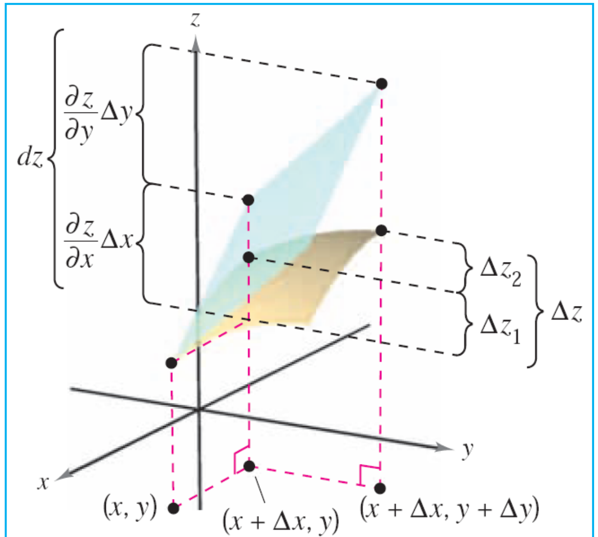
Si f es una función de x y y, para la que f_x y f_y son continuas en una región abierta R, entonces f es diferenciable en R.

El teorema implica que **se puede elegir (*x* + Δ*x*, *y* + Δ*y*) suficientemente cerca de (x, y),** para hacer que $\varepsilon_1 \Delta x$ y $\varepsilon_2 \Delta y$ sean **insignificantes** → para **Δ*x* y Δ*y* pequeños → Δ*z* ≈ *dz***

Por tanto:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

representa el **cambio en altura de un plano tangente a la superficie en** el punto **(*x*, *y*, *f*(*x*, *y*)) → aproximación lineal**



El cambio exacto en z es Δz.
Este cambio puede aproximarse mediante la diferencial dz.

DIFERENCIABILIDAD IMPLICA CONTINUIDAD

Si una función de x y y es diferenciable en (x_0, y_0), entonces es continua en (x_0, y_0).

Demostración:

Sea ***f* diferenciable en (x_0, y_0),** donde ***z* = *f*(*x*, *y*),** entonces:

$$\boxed{\Delta z = [f_x(x_0, y_0) + \varepsilon_1]\,\Delta x + [f_y(x_0, y_0) + \varepsilon_2]\,\Delta y}$$

donde **ε_1 y ε_2 → 0 cuando (Δx, Δy) → (0, 0).** Por **definición** se sabe que **Δz** está dada por:

$$\boxed{\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}$$

Haciendo **$x = x_0 + \Delta x$ y $y = y_0 + \Delta y$** y tomando posteriormente el **límite cuando $(x,y) \to (x_0, y_0)$:**

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = [f_x(x_0, y_0) + \varepsilon_1]\,\Delta x + [f_y(x_0, y_0) + \varepsilon_2]\,\Delta y$$

$$\lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0) \longrightarrow$$ **f es continua en (x_0, y_0)**

CEU Universidad San Pablo

Ejemplo: Una función que no es diferenciable

Demostrar que $f_x(0, 0)$ y $f_y(0, 0)$ existen, pero f no es diferenciable en $(0, 0)$

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{-3xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Para demostrar que ***f* no es diferenciable en (0, 0),** basta con **demostrar que *f* no es continua en ese punto** → comprobar **dos trayectorias diferentes**

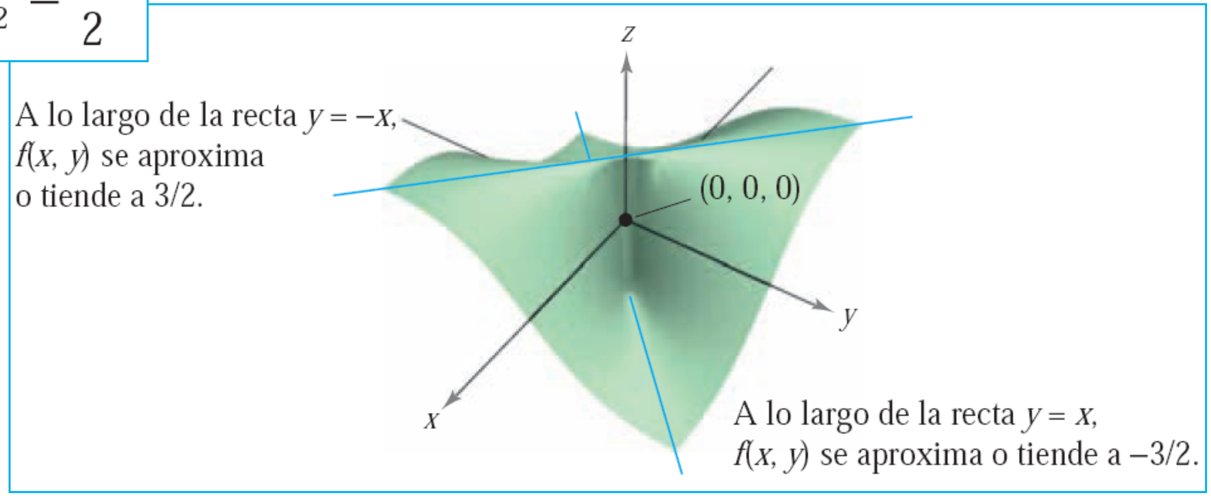
$$\lim_{(x,\, x)\to(0,\, 0)} f(x, y) = \lim_{(x,\, x)\to(0,\, 0)} \frac{-3x^2}{2x^2} = -\frac{3}{2}$$

$$\lim_{(x,\, -x)\to(0,\, 0)} f(x, y) = \lim_{(x,\, -x)\to(0,\, 0)} \frac{3x^2}{2x^2} = \frac{3}{2}$$

Existencia de derivadas parciales:

$$f_x(0, 0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = 0$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = 0$$



Casos de estudio:

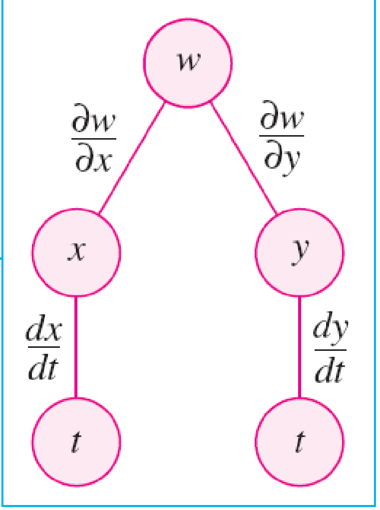
1. ***w*** **es una función de** ***x*** **e** ***y***, donde ***x*** **e** ***y*** son **funciones** de **una sola variable independiente** *t*
2. ***w*** **es una función de** ***x*** **e** ***y***, donde ***x*** **e** ***y*** son **funciones** de **dos variables independientes** *s* y *t*

Caso 1:

REGLA DE LA CADENA: UNA VARIABLE INDEPENDIENTE

Sea $w = f(x, y)$, donde f es una función derivable de x y y. Si $x = g(t)$ y $y = h(t)$, donde g y h son funciones derivables de t, entonces w es una función diferenciable de t, y

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$



Este **diagrama** representa la **derivada de** ***w*** **con respecto a** ***t***

Ejemplo: Regla de la cadena con una variable independiente (caso 1)

Sea $w = x^2y - y^2$, donde x = sen t e $y = e^t$

Hallar dw/dt cuando $t = 0$

De acuerdo con la regla de la cadena para una variable independiente se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 2xy(\cos t) + (x^2 - 2y)e^t \\ &= 2(\operatorname{sen} t)(e^t)(\cos t) + (\operatorname{sen}^2 t - 2e^t)e^t = 2e^t \operatorname{sen} t \cos t + e^t \operatorname{sen}^2 t - 2e^{2t}\end{aligned}$$

Cuanto $t = 0$ se sigue que $dw/dt = -2$

NOTA: La **regla de la cadena** con una variable independiente puede **extenderse a cualquier número de variables** → si **cada x_i es función derivable de una sola variable t**, entonces para **$w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$** se tiene:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial w}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \cdot\cdot\cdot + \frac{\partial w}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}$$

Caso 2:

REGLA DE LA CADENA: DOS VARIABLES INDEPENDIENTES

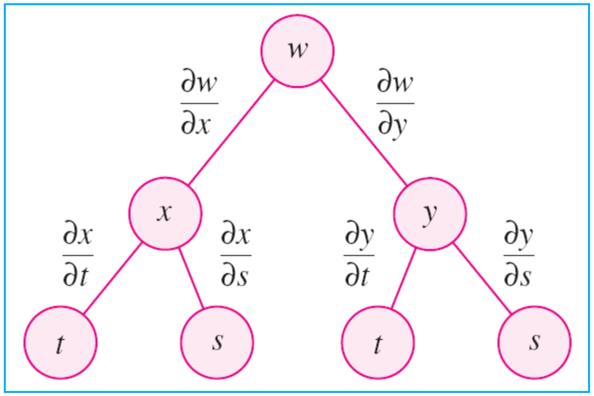
Sea $w = f(x, y)$, donde f es una función diferenciable de x y y. Si $x = g(s, t)$ y $y = h(s, t)$ son tales que las derivadas parciales de primer orden $\partial x/\partial s$, $\partial x/\partial t$, $\partial y/\partial s$ y $\partial y/\partial t$ existen, entonces $\partial w/\partial s$ y $\partial w/\partial t$ existen y están dadas por

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \quad \text{y} \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Demostración:

Para obtener ***dw/ds***, se mantiene **constante *t*** y se aplica la regla de la cadena para una variable independiente.

Para obtener ***dw/dt***, se procede de manera similar, pero manteniendo **constante *s***



Ejemplo: Regla de la cadena con dos variables independientes

Utilizar la regla de la cadena para encontrar w_s y w_t dada $w = 2xy$

$x = s^2 + t^2$, $y = s/t$

Para **obtener w_s** se mantiene **constante t** y se **deriva con respecto a s**

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = 2y(2s) + 2x\left(\frac{1}{t}\right) = 2\left(\frac{s}{t}\right)(2s) + 2(s^2 + t^2)\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$= \frac{4s^2}{t} + \frac{2s^2 + 2t^2}{t} = \frac{6s^2 + 2t^2}{t}$$

Para **obtener w_t** se mantiene **constante s** y se **deriva con respecto a t**

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = 2y(2t) + 2x\left(\frac{-s}{t^2}\right) = 2\left(\frac{s}{t}\right)(2t) + 2(s^2 + t^2)\left(\frac{-s}{t^2}\right)$$

$$= 4s - \frac{2s^3 + 2st^2}{t^2} = \frac{2st^2 - 2s^3}{t^2}$$

NOTA:

La **regla de la cadena para funciones de varias variables** también puede **extenderse a cualquier número de variables**

Si ***w* es una función diferenciable de *n* variables** $x_1, x_2, \ldots, x_n$, donde cada $\boldsymbol{x_i}$ **es una función diferenciable de *m* variables** $t_1, t_2, \ldots, t_m$, entonces para

$\boldsymbol{w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$

se obtiene

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial t_1} &= \frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial w}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \cdots + \frac{\partial w}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_1} \\
\frac{\partial w}{\partial t_2} &= \frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial w}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \cdots + \frac{\partial w}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_2} \\
&\vdots \\
\frac{\partial w}{\partial t_m} &= \frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_m} + \frac{\partial w}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_m} + \cdots + \frac{\partial w}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_m}
\end{aligned}
$$

La regla de la cadena puede aplicarse para determinar la derivada de funciones definidas *implícitamente:*

Si ***x*** **e** ***y*** **están relacionadas por la ecuación** ***F*****(*x*, *y*) = 0**, y suponiendo que ***y*** **=** ***f*****(*x*)** es una **función derivable de** ***x***, entonces, para **hallar** ***dy/dx***, podemos utilizar la siguiente alternativa:

Se define ***w*** **=** ***F*****(*x*, *y*) =** ***F*****(*x*, *f*(*x*))**

Se aplica la **regla de la cadena**, de manera que:

$$\boxed{\frac{dw}{dx} = F_x(x, y)\,\frac{dx}{dx} + F_y(x, y)\,\frac{dy}{dx}}$$

Como ***w*** **=** ***F*****(*x*, *y*) = 0 para toda** ***x*** **en el dominio de** ***f***, se sabe que ***dw/dx*** **= 0** y se tiene que:

$$\boxed{F_x(x, y)\,\frac{dx}{dx} + F_y(x, y)\,\frac{dy}{dx} = 0}$$

Si $F_y(x, y) \neq 0$, se puede usar el hecho de que ***dx/dx*** **= 1** para concluir que:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}}$$

REGLA DE LA CADENA: DERIVACIÓN IMPLÍCITA

Si la ecuación $F(x, y) = 0$ define a y implícitamente como función derivable de x, entonces

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}, \qquad F_y(x, y) \neq 0.$$

Si la ecuación $F(x, y, z) = 0$ define a z implícitamente como función diferenciable de x y y, entonces

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}, \quad F_z(x, y, z) \neq 0.$$

NOTA: Este teorema puede extenderse a funciones diferenciales definidas implícitamente de cualquier número de variables

Ejemplo: Hallar derivadas parciales implícitamente (utilizando la regla de la cadena)

Encontrar f_x y f_y, dada la ecuación $3x^2z - x^2y^2 + 2z^3 + 3yz - 5 = 0$ y sabiendo que $z = f(x, y)$

En primer lugar, se define F como:

$$F(x, y, z) = 3x^2z - x^2y^2 + 2z^3 + 3yz - 5$$

Entonces:

$$F_x(x, y, z) = 6xz - 2xy^2$$
$$F_y(x, y, z) = -2x^2y + 3z$$
$$F_z(x, y, z) = 3x^2 + 6z^2 + 3y$$

Con lo que:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} = \frac{2xy^2 - 6xz}{3x^2 + 6z^2 + 3y}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} = \frac{2x^2y - 3z}{3x^2 + 6z^2 + 3y}$$

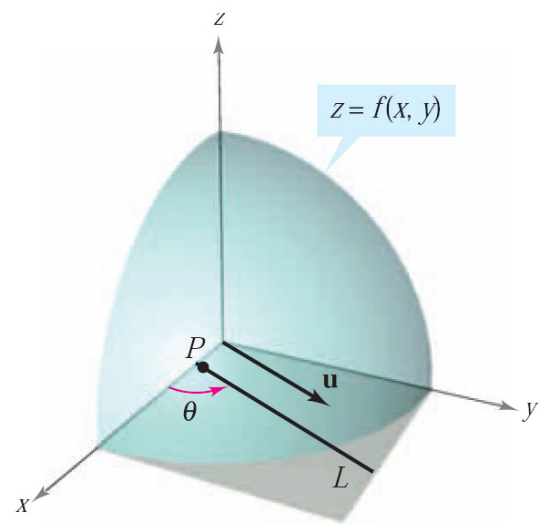
Para determinar la **pendiente en un punto de una superficie**, se define un **nuevo tipo de derivada: DERIVADA DIRECCIONAL**

Sea $z = f(x, y)$ una superficie y $P(x_0, y_0)$ un punto en el dominio de f → la dirección de la derivada direccional está dada por un vector unitario:

u = cos ***ϑ i*** + sen ***ϑ j***, donde ***ϑ*** es el ángulo que forma el vector con el eje *x* positivo

Se reduce el problema a dos dimensiones cortando la superficie con un plano vertical que pasa por *P* y paralelo a ***u***:

La pendiente de la superficie en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ en la dirección ***u*** se define como la pendiente de la curva *C* en ese punto



¿Cómo se calcula la **pendiente de la curva C** en el punto (x_0, y_0, $f(x_0, y_0)$)? → **utilizando límites**

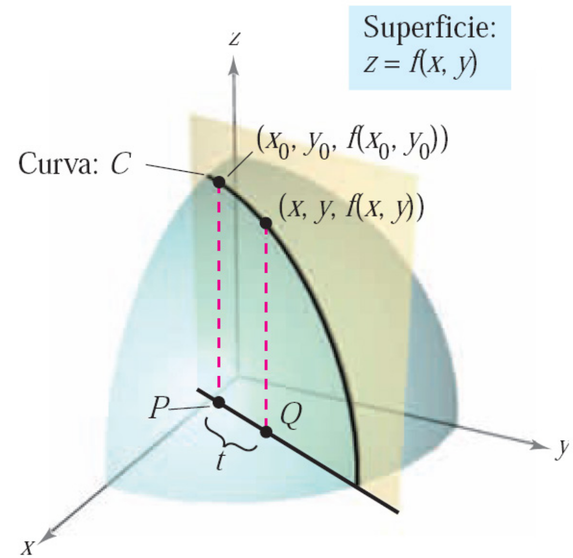
El plano vertical utilizado para formar *C* corta el plano *xy* en una recta *L*, representada por las ecuaciones paramétricas:

$x = x_0 + t \cos \vartheta$

$y = y_0 + t \operatorname{sen} \vartheta$

de manera que para todo valor de *t*, el punto *Q*(*x*, *y*) se encuentra en la recta *L* → para cada uno de los puntos *P* y *Q*, hay un punto correspondiente en la superficie

$(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$	Punto sobre *P*.
$(x, y, f(x, y))$	Punto sobre *Q*.



La distancia entre *P* y *Q* es:

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \sqrt{(t\cos\theta)^2 + (t\operatorname{sen}\theta)^2} = |t|$$

¿Cómo se calcula la **pendiente de la curva C** en el punto (x_0, y_0, $f(x_0, y_0)$)? → **utilizando límites**

Se puede escribir la pendiente de la recta secante que pasa por (x_0, y_0, $f(x_0, y_0)$) y (x, y, $f(x, y)$) como:

$$\frac{f(x, y) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{f(x_0 + t\cos\theta, y_0 + t\,\mathrm{sen}\,\theta) - f(x_0, y_0)}{t}$$

Finalmente, haciendo que t se aproxime a 0, se llega a la siguiente definición:

DEFINICIÓN DE LA DERIVADA DIRECCIONAL

Sea f una función de dos variables x y y, y sea $\mathbf{u} = \cos\theta\mathbf{i} + \mathrm{sen}\,\theta\mathbf{j}$ un vector unitario. Entonces la **derivada direccional de f en la dirección de u**, que se denota $D_{\mathbf{u}}f$, es

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t\cos\theta, y + t\,\mathrm{sen}\,\theta) - f(x, y)}{t}$$

siempre que este límite exista.

DERIVADA DIRECCIONAL

Si f es una función diferenciable de x y y, entonces la derivada direccional de f en la dirección del vector unitario $\mathbf{u} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}$ es

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = f_x(x, y)\cos\theta + f_y(x, y)\operatorname{sen}\theta$$

Demostración:

Dado un punto fijado **(x_0, y_0),** sea $\boldsymbol{x = x_0 + t\cos\vartheta}$ y sea $\boldsymbol{y = y_0 + t\operatorname{sen}\vartheta}$. Se define $\boldsymbol{g(t) = f(x, y)}$

Como ***f* es diferenciable**, se aplica **la regla de la cadena** para obtener:

$$g'(t) = f_x(x, y)\,x'(t) + f_y(x, y)\,y'(t) = f_x(x, y)\cos\theta + f_y(x, y)\operatorname{sen}\theta$$

Si $\boldsymbol{t = 0}$, entonces $\boldsymbol{x = x_0}$ e $\boldsymbol{y = y_0}$, por tanto:

$$g'(0) = f_x(x_0, y_0)\cos\theta + f_y(x_0, y_0)\operatorname{sen}\theta$$

Según la **definición de *g'*(*t*),** se cumple que: $g'(0) = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{g(t) - g(0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(x_0 + t\cos\theta, y_0 + t\operatorname{sen}\theta) - f(x_0, y_0)}{t}$

Por tanto: $D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\cos\theta + f_y(x_0, y_0)\operatorname{sen}\theta$

Ejemplo: Hallar una derivada direccional

Hallar la derivada direccional de *f*(*x*, *y*) en (1, π/2) en la dirección de ***v*** = 3***i*** – 4***j***

$f(x, y) = x^2 \, sen \; 2y$

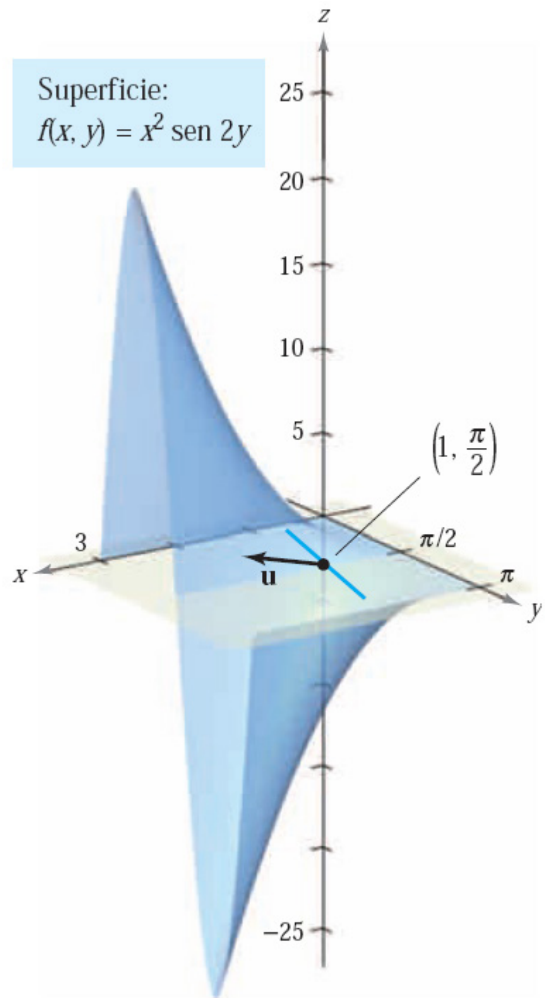
f_x y f_y son continuas, *f* es diferenciable, y por tanto, se puede aplicar el teorema de la derivada direccional

Se calcula, por tanto, un vector unitario en la dirección de ***v***

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}$$

Utilizando ese vector unitario, se tiene:

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = (2x \operatorname{sen} 2y)(\cos\theta) + (2x^2 \cos 2y)(\operatorname{sen}\theta)$$
$$D_{\mathbf{u}} f\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = (2 \operatorname{sen}\pi)\left(\frac{3}{5}\right) + (2\cos\pi)\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{8}{5}$$



DEFINICIÓN DE GRADIENTE DE UNA FUNCIÓN DE DOS VARIABLES

Sea $z = f(x, y)$ una función de x y y tal que f_x y f_y existen. Entonces el **gradiente de f**, denotado por $\nabla f(x, y)$, es el vector

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}.$$

∇f se lee como "nabla f". Otra notación para el gradiente es **grad** $f(x, y)$

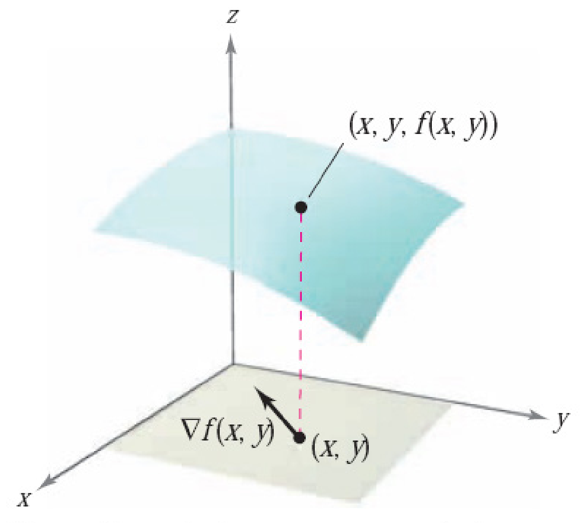
Ejemplo: Hallar el gradiente de una función

Hallar el gradiente de $f(x, y) = y \ln x + xy^2$ en el punto (1, 2)

$$f_x(x, y) = \frac{y}{x} + y^2 \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = \ln x + 2xy$$

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{y}{x} + y^2\right)\mathbf{i} + (\ln x + 2xy)\mathbf{j}$$

$$\nabla f(1, 2) = \left(\frac{2}{1} + 2^2\right)\mathbf{i} + [\ln 1 + 2(1)(2)]\mathbf{j} = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$$



El gradiente de f es un vector en el plano xy

Como el **gradiente de *f* es un vector**, se puede expresar la **derivada direccional de *f* en la dirección de *u*** como:

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = [f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}] \cdot [\cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}]$$

Por tanto, la **derivada direccional** es el **producto escalar del gradiente y el vector dirección**

FORMA ALTERNATIVA DE LA DERIVADA DIRECCIONAL

Si f es una función diferenciable de x y y, entonces la derivada direccional de f en la dirección del vector unitario $\mathbf{u}$ es

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u}$$

¿En qué dirección es necesario moverse para que *f*(*x*, *y*) varíe lo más rápidamente posible?

DIRECCIÓN DE MAYOR VARIACIÓN → viene dada por el GRADIENTE

PROPIEDADES DEL GRADIENTE
Sea f diferenciable en el punto (x, y). **1.** Si $\nabla f(x, y) = \mathbf{0}$, entonces $D_{\mathbf{u}} f(x, y) = 0$ para todo $\mathbf{u}$. **2.** ~~La dirección de *máximo* incremento de f está dada por $\nabla f(x, y)$~~. El valor máximo de $D_{\mathbf{u}} f(x, y)$ es $\\|\nabla f(x, y)\\|$. **3.** ~~La dirección de *mínimo* incremento de f está dada por $-\nabla f(x, y)$~~. El valor mínimo de $D_{\mathbf{u}} f(x, y)$ es $-\\|\nabla f(x, y)\\|$.

Ejemplo: Hallar la dirección de máximo incremento

La temperatura en grados Celsius en la superficie de una placa metálica es: $T(x, y) = 20 - 4x^2 - y^2$

donde x e y se miden en centímetros

¿En qué dirección a partir de (2, -3) varía más rápido la temperatura? ¿Cuál es la tasa o ritmo de variación?

El **gradiente** es:

$$\boxed{\nabla T(x, y) = T_x(x, y)\mathbf{i} + T_y(x, y)\mathbf{j} = -8x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j}}$$

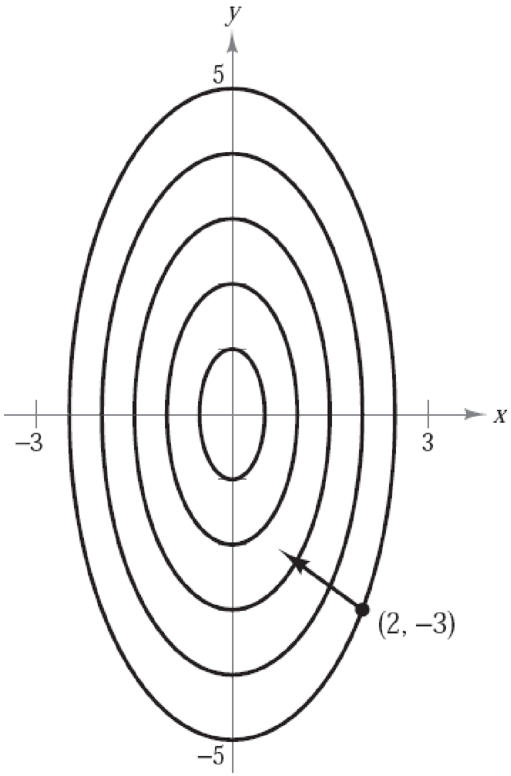
La **dirección de máxima variación** está dada por:

$$\boxed{\nabla T(2, -3) = -16\mathbf{i} + 6\mathbf{j}}$$

La **tasa variación** es:

$$\boxed{\|\nabla T(2, -3)\| = \sqrt{256 + 36} = \sqrt{292} \approx 17.09° \text{ por cm.}}$$

Curvas de nivel:
$T(x, y) = 20 - 4x^2 - y^2$



La dirección del máximo incremento de la temperatura en $(2, -3)$ está dada por $-16\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$

DERIVADA DIRECCIONAL Y GRADIENTE PARA FUNCIONES DE TRES VARIABLES

Sea f una función de x, y y z, con derivadas parciales de primer orden continuas. La **derivada direccional de f** en dirección de un vector unitario $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ está dada por

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y, z) = af_x(x, y, z) + bf_y(x, y, z) + cf_z(x, y, z).$$

El **gradiente de f** se define como

$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z)\mathbf{i} + f_y(x, y, z)\mathbf{j} + f_z(x, y, z)\mathbf{k}.$$

Las propiedades del gradiente son:

1. $D_{\mathbf{u}} f(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) \cdot \mathbf{u}$

2. Si $\nabla f(x, y, z) = \mathbf{0}$, entonces $D_{\mathbf{u}} f(x, y, z) = 0$ para toda $\mathbf{u}$.

3. La dirección de *máximo* incremento de f está dada por $\nabla f(x, y, z)$. El valor máximo de $D_{\mathbf{u}} f(x, y, z)$ es

$$\|\nabla f(x, y, z)\|.$$ Valor máximo de $D_{\mathbf{u}} f(x, y, z)$.

4. La dirección de *mínimo* incremento de f está dada por $-\nabla f(x, y, z)$. El valor mínimo de $D_{\mathbf{u}} f(x, y, z)$ es

$$-\|\nabla f(x, y, z)\|.$$ Valor mínimo de $D_{\mathbf{u}} f(x, y, z)$.

Ejemplo: Hallar el gradiente para una función de tres variables

Hallar **grad** $f(x, y, z)$ para la función dada por:

$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4z$

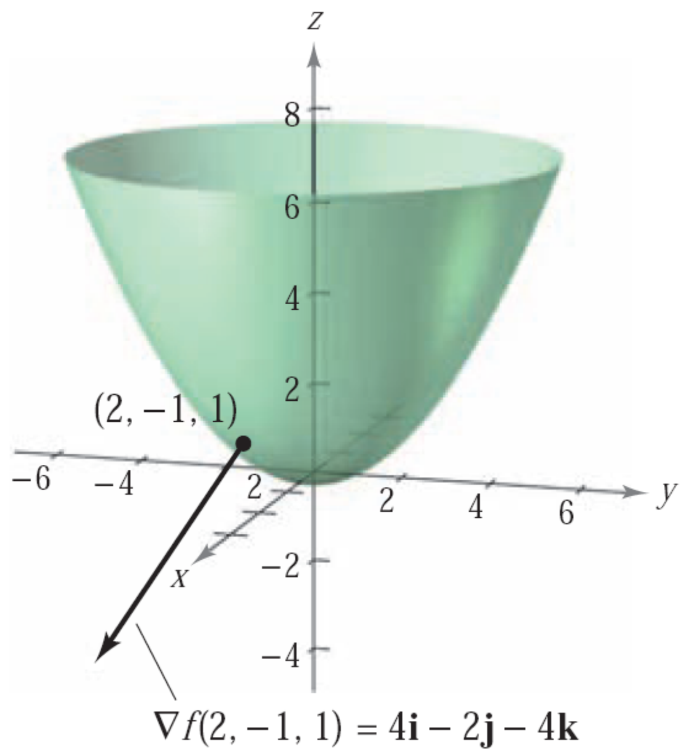
y hallar la dirección de máximo incremento de f en el punto (2, -1, 1)

El **vector gradiente** está dado por:

$$\boxed{\begin{aligned}\nabla f(x, y, z) &= f_x(x, y, z)\mathbf{i} + f_y(x, y, z)\mathbf{j} + f_z(x, y, z)\mathbf{k} \\ &= 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - 4\mathbf{k}\end{aligned}}$$

La **dirección de máximo incremento** en (2, -1, 1) es:

$$\boxed{\nabla f(2, -1, 1) = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}}$$



Superficie de nivel y vector gradiente en $(2, -1, 1)$ para $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4z$

NOTA: Las superficies en el espacio, pueden representarse con **ecuaciones de la forma $z = f(x, y)$,** sin embargo, para entender bien el proceso de cómo **encontrar un plano tangente a la superficie**, resulta **más útil expresar la superficie** con ecuaciones de la forma **$F(x, y, z) = 0$**

Sea ***$F(x, y, z) = 0$*** y sea **$P(x_0, y_0, z_0)$** un **punto en *S***

Sea ***C* una curva en *S* que pasa por *P*** definida por:

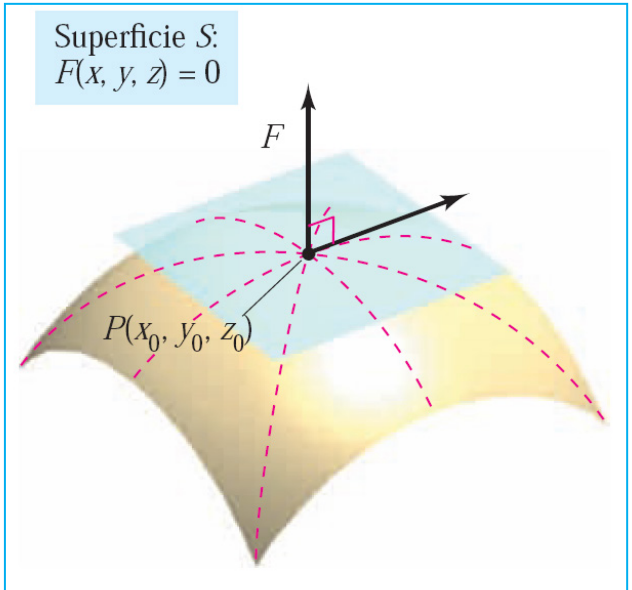
$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k} \rightarrow$ para todo t, $F(x(t), y(t), z(t)) = 0$

Si ***F* es diferenciable y $x'(t)$, $y'(t)$ y $z'(t)$ existen**, se sigue por la **regla de la cadena** que:

$$\boxed{0 = F'(t) = F_x(x, y, z)x'(t) + F_y(x, y, z)y'(t) + F_z(x, y, z)z'(t)}$$

En (x_0, y_0, z_0), la forma vectorial equivalente es:

$$0 = \underbrace{\nabla F(x_0, y_0, z_0)}_{\text{Gradiente}} \cdot \underbrace{\mathbf{r}'(t_0)}_{\text{Vector tangente}}$$



Plano tangente a la superficie S en P

DEFINICIÓN DE PLANO TANGENTE Y RECTA NORMAL

Sea F diferenciable en un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ de la superficie S dada por $F(x, y, z) = 0$ tal que $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$.

1. Al plano que pasa por P y es normal a $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ se le llama **plano tangente a *S* en *P*.**
2. A la recta que pasa por P y tiene la dirección de $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ se le llama **recta normal a *S* en *P*.**

NOTA: Para hallar una ecuación para el plano tangente a S en (x_0, y_0, z_0), sea (x, y, z) un punto arbitrario en el plano tangente → $\boldsymbol{v} = (x - x_0)\boldsymbol{i} + (y - y_0)\boldsymbol{j} + (z - z_0)\boldsymbol{k}$ se encuentra en el plano tangente **grad** $F(x_0, y_0, z_0)$ debe ser ortogonal a todo vector en el plano tangente → **grad** $F(x_0, y_0, z_0) \cdot \boldsymbol{v} = 0$

ECUACIÓN DEL PLANO TANGENTE

Si F es diferenciable en (x_0, y_0, z_0), entonces una ecuación del plano tangente a la superficie dada por $F(x, y, z) = 0$ en (x_0, y_0, z_0) es

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

Ejemplo: Hallar una ecuación de un plano tangente

Hallar una ecuación del plano tangente al hiperboloide $z^2 - 2x^2 - 2y^2 = 12$, en el punto (1, -1, 4)

$F(x, y, z) = z^2 - 2x^2 - 2y^2 - 12$

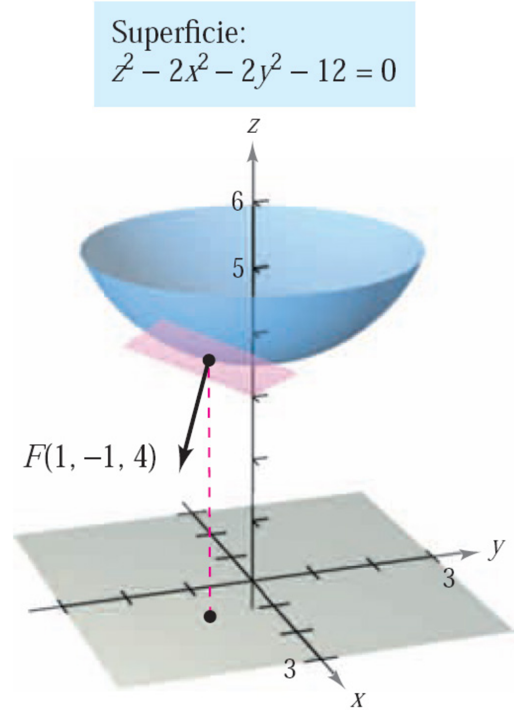
$F_x(x, y, z) = -4x \rightarrow F_x(1, -1, 4) = -4$

$F_y(x, y, z) = -4y \rightarrow F_y(1, -1, 4) = 4$

$F_z(x, y, z) = 2z \rightarrow F_z(1, -1, 4) = 8$

Por tanto, una ecuación del plano tangente en (1, -1, 4) es:

$$\begin{aligned} -4(x-1) + 4(y+1) + 8(z-4) &= 0 \\ -4x + 4 + 4y + 4 + 8z - 32 &= 0 \\ -4x + 4y + 8z - 24 &= 0 \\ x - y - 2z + 6 &= 0 \end{aligned}$$



Plano tangente a la superficie

Ejemplo: Hallar una ecuación de una recta normal a una superficie

Hallar un conjunto de ecuaciones simétricas para la recta normal a la superficie dada por *xyz* = 12 en el punto (2, -2, -3)

F(*x*, *y*, *z*) = *xyz* – 12

El gradiente está dado por:

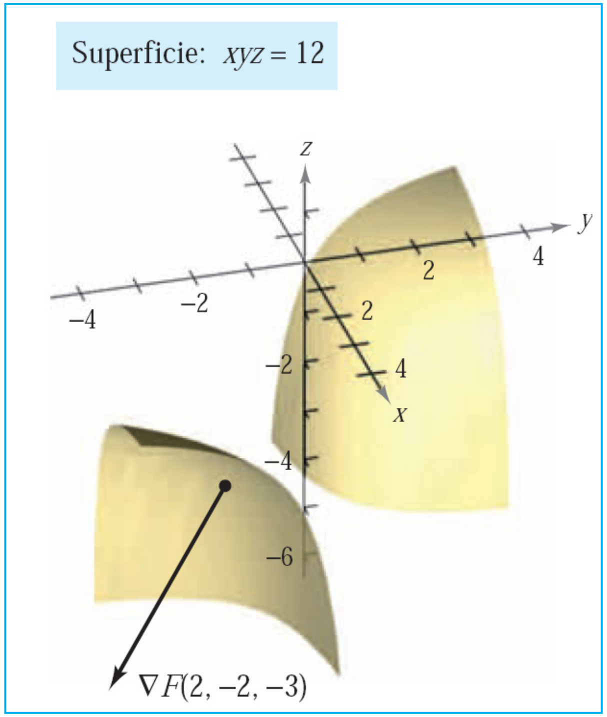
$$\nabla F(x, y, z) = F_x(x, y, z)\mathbf{i} + F_y(x, y, z)\mathbf{j} + F_z(x, y, z)\mathbf{k} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$$

Y en el punto (2, -2, -3) se tiene:

$$\nabla F(2, -2, -3) = (-2)(-3)\mathbf{i} + (2)(-3)\mathbf{j} + (2)(-2)\mathbf{k} = 6\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$$

La recta normal en (2, -2, -3) tiene directores 6, -6, -4, y el conjunto correspondiente de ecuaciones simétricas es:

$$\frac{x-2}{6} = \frac{y+2}{-6} = \frac{z+3}{-4}$$

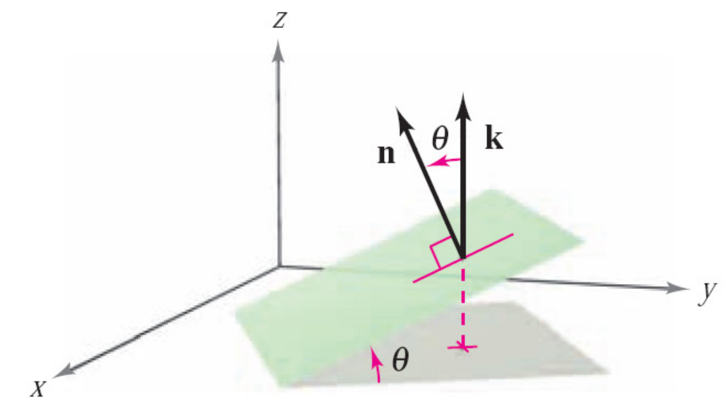


Otro uso interesante del gradiente **grad F(x, y, z)** es determinar el **ángulo de inclinación del plano tangente a una superficie**

- El **ángulo de inclinación de un plano se** define como él **ángulo ϑ** ($0 \le \vartheta \le \pi/2$) **entre el plano dado y el plano *xy***

- Como el vector ***k*** es **normal al plano *xy***, se puede utilizar la fórmula del **coseno del ángulo entre dos planos** para concluir que el ángulo de inclinación de un plano con vector normal ***n*** está dado por:

$$\cos\theta = \frac{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}|}{\|\mathbf{n}\|\,\|\mathbf{k}\|} = \frac{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}|}{\|\mathbf{n}\|}$$



Ángulo de inclinación

Ejemplo: Hallar el ángulo de inclinación de un plano tangente

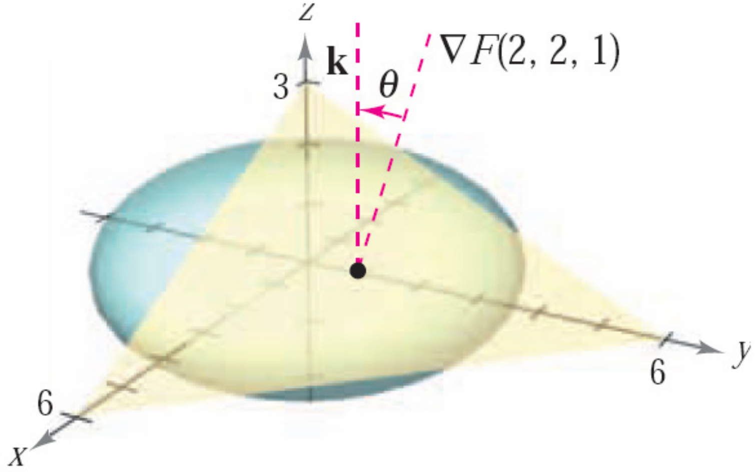
Hallar el ángulo de inclinación en el punto (2, 2, 1) del plano tangente al elipsoide

$$\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{3} = 1$$

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{3} - 1$$

$$\nabla F(x, y, z) = \frac{x}{6}\mathbf{i} + \frac{y}{6}\mathbf{j} + \frac{2z}{3}\mathbf{k}$$

$$\nabla F(2, 2, 1) = \frac{1}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}$$



grad F(2, 2, 1) es **normal al plano tangente**

y ***k*** es **normal al plano *xy***

$$\cos\theta = \frac{|\nabla F(2, 2, 1) \cdot \mathbf{k}|}{\|\nabla F(2, 2, 1)\|} = \frac{2/3}{\sqrt{(1/3)^2 + (1/3)^2 + (2/3)^2}}$$

$$\theta = \arccos\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 35.3^\circ$$

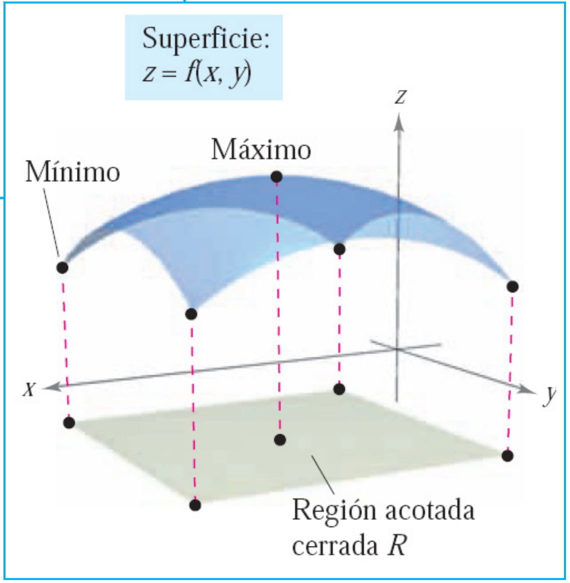
Sea *f* una función continua de dos variables, definida en una región acotada cerrada *R*

Los **valores *f*(*a*, *b*) y *f*(*c*, *d*)** tales que ***f*(*a*, *b*) ≤ *f*(*x*, *y*) ≤ *f*(*c*, *d*)** para **todo (*x*, *y*) en *R*** se conocen como el **mínimo y máximo de *f* en la región *R***

TEOREMA DEL VALOR EXTREMO

Sea f una función continua de dos variables x y y definida en una región acotada cerrada R en el plano xy.

1. Existe por lo menos un punto en R, en el que f toma un valor mínimo.
2. Existe por lo menos un punto en R, en el que f toma un valor máximo.



- ***R* contiene algún(os) punto(s) donde *f*(*x*, *y*) es un mínimo y algún(os) punto(s) donde *f*(*x*, *y*) es un máximo**
- A un **mínimo también se le llama un mínimo absoluto**, y a **un máximo, máximo absoluto**

DEFINICIÓN DE EXTREMOS RELATIVOS

Sea f una función definida en una región R que contiene (x_0, y_0).

1. La función f tiene un **mínimo relativo** en (x_0, y_0) si

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$$

para todo (x, y) en un disco *abierto* que contiene (x_0, y_0).

2. La función f tiene un **máximo relativo** en (x_0, y_0) si

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$$

para todo (x, y) en un disco *abierto* que contiene (x_0, y_0).

NOTA:

- Decir que ***f* tiene un máximo relativo en (x_0, y_0)** significa que **el punto (x_0, y_0, z_0) es por lo menos tan "alto" como todos los puntos cercanos** en la gráfica de $z = f(x, y)$
- Decir **que *f* tiene un mínimo relativo en (x_0, y_0)** significa que **el punto (x_0, y_0, z_0) es por lo menos tan "bajo" como todos los puntos cercanos** en la gráfica de $z = f(x, y)$

Para **localizar los extremos relativos de *f***, se pueden **investigar los puntos en los que el gradiente de *f* es 0** o los **puntos en los cuales una de las derivadas parciales no exista** → tales puntos se llaman **puntos críticos de *f***

DEFINICIÓN DE LOS PUNTOS CRÍTICOS

Sea f definida en una región abierta R que contiene (x_0, y_0). El punto (x_0, y_0) es un **punto crítico** de f si se satisface una de las condiciones siguientes:

1. $f_x(x_0, y_0) = 0$ y $f_y(x_0, y_0) = 0$
2. $f_x(x_0, y_0)$ o $f_y(x_0, y_0)$ no existe.

LOS EXTREMOS RELATIVOS SE PRESENTAN SÓLO EN PUNTOS CRÍTICOS

Si f tiene un extremo relativo en (x_0, y_0) en una región abierta R, entonces (x_0, y_0) es un punto crítico de f.

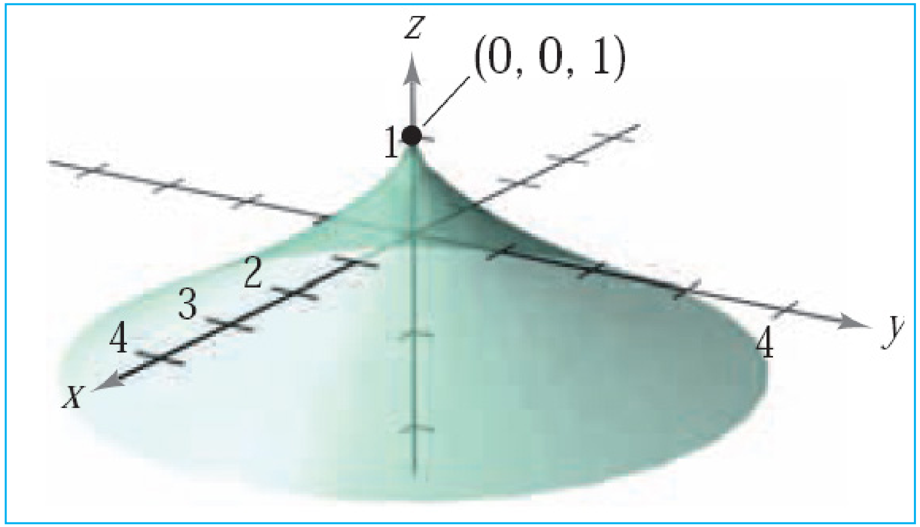
Ejemplo: Hallar un extremo relativo

Determinar los extremos relativos de

$f(x, y) = 1 - (x^2 + y^2)^{1/3}$

$$f_x(x, y) = -\frac{2x}{3(x^2 + y^2)^{2/3}}$$

$$f_y(x, y) = -\frac{2y}{3(x^2 + y^2)^{2/3}}$$



- Las derivadas parciales $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ existen para todo punto en el plano *xy* salvo para (0, 0)
- No hay ningún punto $(x, y) \neq (0, 0)$ que anule a la vez $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$

Se concluye que **(0, 0) es el único punto crítico**

$f(0, 0) = 1$ y para cualquier otro $(x, y) \rightarrow f(x, y) = 1 - (x^2 + y^2)^{1/3} < 1$

Por tanto**, *f* tiene un máximo relativo en (0, 0)**

NOTA: un extremo relativo siempre es un punto crítico, pero un punto crítico no siempre es un extremo relativo (puntos silla)

¿Cómo determinar si un (a, b) tal que $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$ es o no un extremo relativo?

CRITERIO DE LAS SEGUNDAS DERIVADAS PARCIALES

Sea f una función con segundas derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene un punto (a, b) para el cual

$$f_x(a, b) = 0 \quad \text{y} \quad f_y(a, b) = 0.$$

Para buscar los extremos relativos de f, considérese la cantidad

$$d = f_{xx}(a, b) f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2.$$

1. Si $d > 0$ y $f_{xx}(a, b) > 0$, entonces f tiene un **mínimo relativo** en (a, b).
2. Si $d > 0$ y $f_{xx}(a, b) < 0$, entonces f tiene un **máximo relativo** en (a, b).
3. Si $d < 0$, entonces $(a, b, f(a, b))$ es un **punto silla**.
4. Si $d = 0$ el criterio no lleva a ninguna conclusión.

Ejemplo: Cuando el criterio de las segundas derivadas parciales no es concluyente

Hallar los extremos relativos de $f(x, y) = x^2y^2$

Como $f_x(x, y) = 2xy^2$ y $f_y(x, y) = 2x^2y$, se sabe que ambas derivadas parciales son igual a 0 si $x = 0$ o $y = 0$

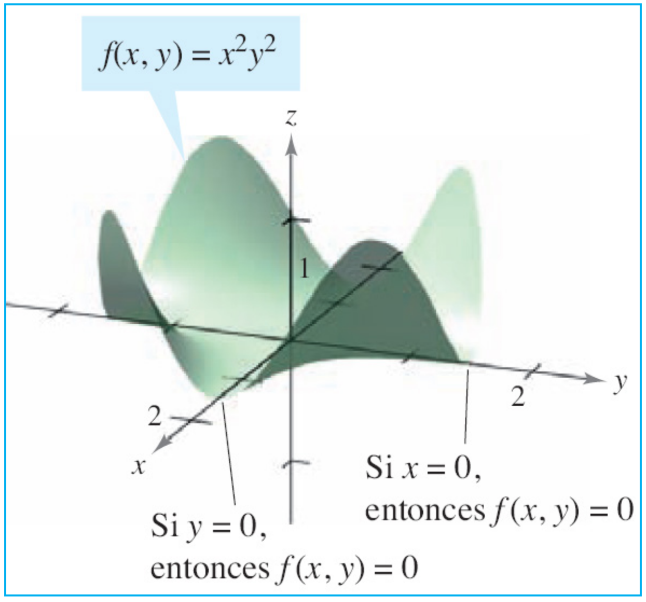
Es decir, **todo punto del eje *x* o del eje *y* es un punto crítico**

$$f_{xx}(x, y) = 2y^2, \qquad f_{yy}(x, y) = 2x^2 \qquad \text{y} \qquad f_{xy}(x, y) = 4xy$$

Por tanto, se sabe que si $x = 0$ o $y = 0$, entonces:

$$\begin{aligned} d &= f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - [f_{xy}(x, y)]^2 \\ &= 4x^2y^2 - 16x^2y^2 = -12x^2y^2 = 0 \end{aligned}$$

- **El criterio de las segundas derivadas parciales no es concluyente**
- Sin embargo, como ***f*(*x*, *y*) = 0 para todo punto en los ejes *x* o *y* y *f*(*x*, *y*) = x^2y^2 > 0 → cada uno de los puntos críticos es un mínimo absoluto**



Los conceptos de extremos relativos y puntos críticos pueden extenderse a funciones de tres o más variables:

- Si todas **las primeras derivadas parciales de $w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ existen**, puede demostrarse que **se presenta un máximo o un mínimo relativo en $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sólo si cada una de las primeras derivadas parciales en ese punto es 0**
- **En este caso, los puntos críticos se obtienen al resolver el sistema de ecuaciones siguiente:**

$$\boxed{\begin{aligned} f_{x_1}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) &= 0 \\ f_{x_2}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_{x_n}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) &= 0 \end{aligned}}$$

NOTA: Los **extremos absolutos** de una función **se pueden presentar de dos maneras**:

1. Algunos **extremos relativos** pueden resultar ser extremos absolutos
2. Los extremos absolutos pueden presentarse en un **punto frontera** del dominio

Los extremos de funciones de dos (o más variables) tienen muchas aplicaciones

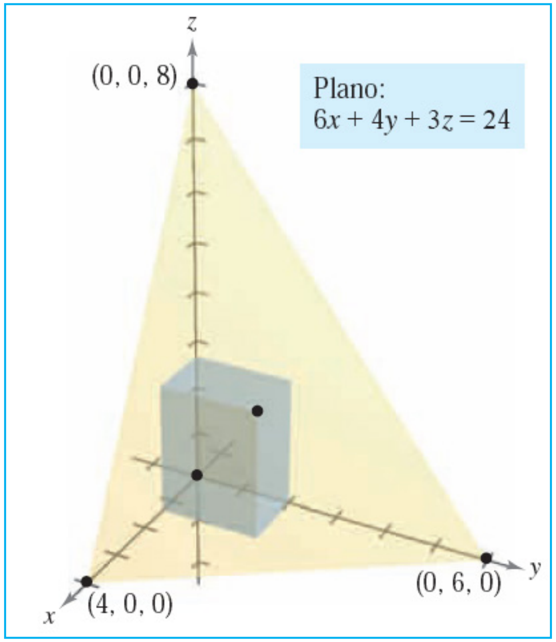
Ejemplo: Hallar un volumen máximo

Una caja rectangular descansa en el plano *xy* con uno de sus vértices en el origen. El vértice opuesto está en el plano $6x + 4y + 3z = 24$. Hallar el volumen máximo de la caja

Sean *x*, *y*, *z* el largo, ancho y la altura de la caja, respectivamente:

$$V_x(x, y) = \tfrac{1}{3}(24y - 12xy - 4y^2) = \frac{y}{3}(24 - 12x - 4y) = 0$$

$$V_y(x, y) = \tfrac{1}{3}(24x - 6x^2 - 8xy) = \frac{x}{3}(24 - 6x - 8y) = 0$$



Igualando a 0 las primeras derivadas parciales se obtienen los **puntos críticos** (0, 0) y (4/3, 2). En el punto (4/3, 2) se puede aplicar el criterio de la segundas derivadas parciales:

$$V_{xx}\left(\tfrac{4}{3}, 2\right)V_{yy}\left(\tfrac{4}{3}, 2\right) - \left[V_{xy}\left(\tfrac{4}{3}, 2\right)\right]^2 = (-8)\left(-\tfrac{32}{9}\right) - \left(-\tfrac{8}{3}\right)^2 = \frac{64}{3}$$

Por tanto, **el volumen máximo es: *V*(4/3, 2) = 64/9 u.c.**

Resumen

Al finalizar este capítulo, debemos ser capaces de…

- Entender la **notación** para una **función de varias variables**
- Dibujar la **gráfica de una función de dos variables**
- Entender la **definición de un entorno en el plano**
- Entender y utilizar la **definición de límite de una función de dos variables**
- Extender el concepto de **continuidad a funciones de dos y tres variables**
- Hallar y utilizar las **derivadas parciales de funciones de dos, tres o más variables**
- Hallar **derivadas parciales de orden superior** de una función de dos o tres variables
- Extender los conceptos de **incrementos y diferenciales**
- Extender el concepto de **diferenciabilidad** a funciones de **dos variables**
- Utilizar una **diferencial como aproximación**
- Utilizar la **regla de la cadena para funciones de varias variables**
- Hallar las **derivadas parciales implícitamente**
- Hallar y usar la **derivadas direccionales de una función de dos variables**
- Hallar **el gradiente de una función de dos variables** y utilizarlo en **aplicaciones**

Al finalizar este capítulo, debemos ser capaces de…

- Hallar las **derivadas direccionales** y el **gradiente** de funciones de tres variables
- Hallar **ecuaciones de planos tangentes** y **rectas normales** a superficies
- Hallar el **ángulo de inclinación de una recta en el espacio**
- **Comparar gradientes**
- Hallar **extremos absolutos y relativos** de una **función de dos variables**
- Utilizar el **criterio de las segundas derivadas parciales** para hallar un **extremo relativo de una función de dos variables**
- Resolver **problemas de optimización** con **funciones de varias variables**